УДК 517.95

О первой смешанной задаче для вырождающихся параболических уравнений с меняющимся направлением времени

И. М. Петрушко*

Показаны свойства решений вырождающихся на боковой границе области параболических уравнений с меняющимся направлением времени. Установлена эквивалентность условий Рисса и Литлвуда–Пэли для указанных решений. Доказана однозначная разрешимость первой смешанной задачи с граничными и начальными функциями из пространств типа L_2. Установлено существование пределов в L_2 с весом решений на участках границы, свободных от начальных условий.

Ключевые слова: параболические уравнения, вырождение, изменение направления времени, функциональные пространства, априорные оценки, смешанная задача, однозначная разрешимость.

Пусть Q — ограниченная область n-мерного пространства R_n, граница которого ∂Q – $1(n-1)$-мерная поверхность без края класса C^2. Q_δ — подмножество множества Q:

$$Q_\delta = Q \cap \left\{ \min_{y \in \partial Q} |x-y| > \delta \right\},$$

Как известно, (см., например [1]) существует такое малое число $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ подмножество Q_δ является областью с границей ∂Q_δ класса C^2. При этом при произвольном $\delta \in (0, \delta_0]$ для любой точки $x \in \partial Q$ существует единственная точка x_δ поверхности ∂Q_δ, отстоящая от точки x_0 на расстояние, равное δ, $|x_\delta - x_0| = \delta$:

$$x_\delta = x_\delta(x_0) = x_0 - \delta \nu(x_0),$$

где $\nu(x_0)$ – вектор внешней по отношению к области Q единичной нормали ∂Q в точке x_0; обратное отображение задается формулой:

$$x_0(x_\delta) = x_\delta + \delta \nu_\delta(x_0),$$

где $\nu_\delta(x_\delta)$ – вектор внешней по отношению к области Q_δ единичной нормали Q_δ в точке x_δ.

Обозначим через $r(x)$ расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q области Q:

$$r(x) = \min_{y \in \partial Q} |x-y|$$

Рассмотрим в цилиндрической области Q^T = $= Q \times (0, \mathrm{T})$ уравнение:

$$Lu = k(x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{i,j} u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f(x,t). \quad (1)$$

Предположим, что коэффициенты $a_{i,j}(x, t)$ достаточно гладкие функции и удовлетворяют условиям: для любой точки $x \in Q_\delta$, $\delta \in (0, \delta_0)$ и для любых $t \in [0, \mathrm{T}]$ существует такая постоянная $\gamma_\delta > 0$, $\gamma_\delta \to 0$, $\delta > 0$, что для всех $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in R_n$:

$$\Phi(x,\xi,t) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \xi_i \xi_j \geq \gamma_\delta \, |\xi|^2 .$$

Для $(x_0, \mathrm{t}) \in \partial Q \times [0, T]$ квадратичная форма вырождается. Однако, предположим, что существует такая постоянная $\gamma^0 > 0$, что для всех $x_0 \in \partial Q$, $t \in [0, T]$:

* petrushko@mail.ru

$$\gamma^0 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\left(x_0,t\right)\nu_i(x_0)\nu_j\left(x_0\right) \le (\gamma^0)^{-1},$$

где $\nu(x_0)$ — вектор внешней по отношению к области Q единичной нормали к поверхности ∂Q в точке x_0.

Будем также предполагать, что функция $k(x)$ меняет знак в области Q.

Положим $Q^+ = \{x\in Q, k(x) > 0\}$; $Q^- = \{x\in Q, k(x) < 0\}$. Для простоты изложения положим, что начало координат находится внутри области Q и $x_n k(x) > 0$, если $x_n\neq 0$, и; $k(x) = 1$, $x\in Q^+$; $k(x) = -1$, $x\in Q^-$. Правую часть $f(x, t)$ уравнения (1) будем предполагать принадлежащей пространству $L_2(Q^T)$

Введем следующие обозначения [2]:

$V_2(Q^T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(Q^T)$, имеющих конечную норму:

$$\|u\|_{V_2(Q^T)} = vrai\max_{0\le t\le T}\left(\|u(x,t)\|_{L_2(Q.)} + \|\nabla u\|_{L_2(Q^T)}\right).$$

$V_2^{1,0}(Q^T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $V_2^1(Q^T)$, непрерывных по t по норме $L_2(Q)$ с нормой

$$\|u\|_{V_2^{1,0}(Q^T)} = \max_{0\le t\le T}\left(\|u(x,t)\|_{L_2(Q.)} + \|\nabla u\|_{L_2(Q^T)}\right).$$

Непрерывность по t функции $u(x, t)$ в норме $L_2(Q)$ означает, что

$$\|u(x,t+\Delta t) - u(x.t)\|_{L_2(Q)} \to 0 \quad \text{при} \quad \Delta t \to 0.$$

$V^{1,0}_{2,\,loc}(Q^T)$ — множество функций, принадлежащих $V_2^{1,0}(Q'^{T-\varepsilon}_{\varepsilon})$ для любой Q', строго внутренней по отношению к Q и для любого $\varepsilon\in(0, T/2)$.

Будем говорить, что функция $u(x, t)$ является обобщенным решением из $V^{1,0}_{2,\,loc}(Q^T)$ уравнения (1), если она принадлежит $V^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ и для всех финитных в Q^T функциях $v(x, t)$ из $H^1(Q^T)$ имеет место равенство $v(x, t)$:

$$\int_0^T\int_Q(-k(x)uv_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} v + auv)dxdt = \int_0^T\int_Q fvdxdt. \tag{2}$$

Будем говорить, что функция $w(x, t)$ финитна по x в Q, если существует такая область Q', строго вложенная в Q, что функция $w(x, t)$ равна нулю вне $Q'\times(0, T)$.

Пусть в заданной области Q^T функция $u(x, t)$ является обобщенным решением из $V^{1,0}_{2,\,loc}(Q^T)$ уравнения (1). Тогда для всех финитных по x в Q функций $w(x, t)$ из $W^{2,1}_{2,\,loc}(Q^T)$ и для любого β, $0 < \beta < T/2$, имеет место равенство

$$\int_Q k(x)u(x,T-\beta)w(x,T-\beta)dx - \int_Q k(x)u(x,\beta)w(x,\beta)dx + \int_0^{T-\beta}\int_Q(-k(x)uw_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}w_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} w + auw)dxdt = \int_0^{T-\beta}\int_Q fwdxdt. \tag{2'}$$

Обозначим через $\rho(x)$, обладающую следующими свойствами:

$$\rho(x) = r(x),\ x\in\bar{Q}\backslash Q_{\delta_0},\ \rho(x)\in C^2(\bar{Q}).$$

Существует постоянная $\gamma_1 > 0$ такая, что для всех $x\in\bar{Q}$:

$$\gamma_1^{-1} r(x) \le \rho(x) \le \gamma_1 r(x).$$

Лемма 1. *Пусть $u(x, t)$ — обобщенное из $V^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ решение уравнения (1), правая часть которого $f(x, t) \in L_2(Q^T)$. Тогда, для любых $\delta\in(0, \delta_0)$ и $\beta\in(0, T/2)$ справедливо равенство:*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{Q_\delta^+} u^2(x,T-\beta)(\rho-\delta)dx - \frac{1}{2}\int_{Q_\delta^-} u^2(x,T-\beta)(\rho-\delta)dx + \\
&+\frac{1}{2}\int_{Q_\delta^-} u^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx - \frac{1}{2}\int_{Q_\delta^+} u^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx + \\
&+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}(\rho-\delta)dxdt - \frac{1}{2}\int_\beta^{T-\beta}\int_{\partial Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\rho_{x_i}\rho_{x_j}u^2 dsdt - \\
&-\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}u^2dxdt - \frac{1}{2}\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i=1}^{n}(a_i(\rho-\delta))_{x_i}u^2dxdt + \\
&+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta} au^2(\rho-\delta)dxdt = \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta} fu(\rho-\delta)dxdt.
\end{aligned} \tag{3}$$

Доказательство леммы 1 проводится совершенно аналогично как и в параболическом случае [9], если в качестве функции $w(x, t)$ в равенстве (2′) взять функцию

$$w(x,t) = \begin{cases} u(x,t)(\rho-\delta), & x\in Q_\delta, t\in(0,t) \\ 0, & (x,t)\in Q^T \setminus Q^T_\delta. \end{cases}$$

Обозначим

$$J(u) = \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}(\rho-\delta)dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\delta^+} u^2(x,T-\beta)(\rho-\delta)dx + +\frac{1}{2}\int_{Q_\delta^-} u^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx;$$

$$M(u) = \frac{1}{2}\int_\beta^{T-\beta}\int_{\partial Q_\delta} u^2(x,t)dsdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\delta^-} u^2(x,T-\beta)(\rho-\delta)dx + \frac{1}{2}\int_{Q_\delta^+} u^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx$$

с произвольными $\delta\in(0, \delta_0]$ и $\beta\in(0, T/2)$.

Из равенства (3) вытекает справедливость следующих неравенств:

$$M_\delta(u) \equiv M(u) \le C_1\left[\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q\delta}|u||f|(\rho-\delta)dxdt + J(u) + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q\delta}u^2dxdt\right];$$

$$J_\delta(u) \equiv J(u) \le C_2\left[\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q\delta}|u||f|(\rho-\delta)dxdt + M(u) + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q\delta}u^2dxdt\right]$$

и, тем самым, справедливость леммы 2.

Лемма 2. *Пусть $u(x, t)$ — обобщенное из $V^{1,0}_{2,\,loc}(Q^T)$ решение уравнения (1). Тогда для всех $\delta\in(0, \delta_0]$ и $\beta\in(0, T/2)$ справедливы оценки:*

$$\max_{\mu\in(0,\delta_0)} M_\mu(u) \le C_3\left\{\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J(u) + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q\delta}u^2dxdt\right\}; \quad (4)$$

$$\max_{\mu\in(0,\delta_0)} J_\mu(u) \le C_4\left\{\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + M(u) + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q\delta}u^2dxdt\right\}. \quad (5)$$

Лемма 3. *Пусть $u(x, t)$ — обобщенное из $V^{1,0}_{2,\,loc}(Q^T)$ решение уравнения (1) и пусть $\sup\limits_{\substack{\delta\in(0,\delta_0)\\ \beta\in(0.T/2)}} J(u) < \infty$. Тогда $u(x, t)\in L_2(Q^T)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_2 > 0$, зависящее от ε и коэффициентов уравнения, что*

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q\setminus Q_{\delta_2}} u^2dxdt \le \varepsilon\left[\|f\|^2_{L_2\left(Q^T\right)} + J(u) + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_2}}u^2dxdt\right]. \quad (6)$$

Доказательство. Для любых δ_4 и δ_5, $0 < \delta_4 < \delta_5 < \delta_0$,

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q4\setminus Q5} u^2dxdt = \int_{\delta_4}^{\delta_5}d\rho\int_\beta^{T-\beta}\int_{\partial Q_\rho}u^2dsdt \le C_5(\delta_5-\delta_4)\times$$
$$\times\left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J_{\delta_4}(u) + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q4}u^2dxdt\right].$$

Из последнего равенства получаем

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_4\setminus Q_5} u^2dxdt \le C_5\delta_5\times$$
$$\times\left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J_{\delta_4}(u) + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_4\setminus Q_{\delta_5}}u^2dxdt + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_{\delta_5}}u^2dxdt\right]. \quad (7)$$

Выберем $\delta_3 = 1/(2C^5)$, при необходимости уменьшая его так, чтобы $\delta_3 < \delta_0$, положим в последем равенстве $\delta_5 = \delta_3$. Тогда для любых $\delta_4\in(0, \delta_3)$ имеем

$$\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q4\setminus Q3} u^2dxdt \le \left[\|f\|^2_{L_2(Q^T)} + J_{\delta_4}(u) + \int_\beta^{T-\beta}\int_{Q\delta_3}u^2dxdt\right]. (8)$$

Из (8) следует , что $\int^T\int_Q u^2dxdt < \infty.$

Выберем теперь $\delta_2 = \min\left\{\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)C_5}, \frac{1}{2C_5}\right\}$ (уменьшая, если нужно, так, чтобы $\delta_2 < \delta_0$) и положим $\delta_5 = \delta_2$ в неравестве (7). Переходя к пределу при $\delta_4 \to 0$, с учетом неравенства (8), получим (6).

Будем говорить, что функция $u(x, t)$ из $V^{1,0}_{2,\,loc}(Q^T)$ принадлежит классу Харди H_2, если

$$\sup_{\substack{\delta\in(0,\delta_0)\\ \beta\in(0,T/2)}} M(u) < \infty. \quad (9)$$

Теорема 1. *Для того, чтобы обобщенное из $V^{1,0}_{2,\,loc}(Q^T)$ решение уравнения* (1) с $f(x, t)\in L_2(Q^T)$ *принадлежало классу Харди H_2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство:*

$$\sup_{\substack{\delta\in(0,\delta_0)\\ \beta\in(0,T/2)}} J(u) < \infty. \quad (10)$$

Необходимость. Пусть $u(x, t)$ принадлежит классу Харди H_2, тогда из (9) следует:

$$\int_0^T\int_{Q\setminus Q\delta_0} u^2(x,t)dxdt < \infty; \quad \int_{\beta_0}^{T-\beta_0}\int_{Q\delta_0} u^2(x,t)dxdt < \infty;$$

$$\int_0^{\beta_0}\int_{Q^+_{\delta_0}} u^2(x,t)\rho(x)dxdt < \infty; \quad \int_{T-\beta_0}^{T}\int_{Q^-_{\delta_0}} u^2(x,t)\rho(x)dxdt < \infty.$$

Следовательно,

$$\int_{\beta_0}^{T-\beta_0}\int_Q u^2(x,t)dxdt < \infty. \quad (11)$$

Из (11) следует, что существует такое число β_1, $\beta_0 < \beta_1 < T/2$, что $\int_Q u^2(x,\beta_1)dx < \infty$

Покажем, что

$$\int_0^{\beta_0}\int_{Q^-_{\delta_0}} u^2(x,t)dxdt < \infty. \quad (12)$$

Рассмотрим функцию $v(x, t) = u(x, t)e^{-\lambda t}$. Легко видеть, что функция $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению:

$$k(x)v_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{i,j}v_{x_i})_{x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_i v_{x_i} + (a+\lambda k)v = f(x,t)e^{-\lambda t}$$

и, следовательно, для нее справедливо равенство:

$$\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} v^2(x,\beta)(\rho-\delta_0)dx+\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q\delta_0}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}(\rho-\delta)dxdt \quad +$$

$$+\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}}\left[-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}+(a-\lambda)(\rho-\delta_0)\right]v^2dxdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{Q^-_{\delta_9}} v^2(x,\beta_1)(\rho-\delta)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} v^2(x,\beta_1)(\rho-\delta)dx- \tag{13}$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} v^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx+\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}}\left[\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}-(a+\lambda)(\rho-\delta_0)\right]\times$$

$$\times v^2dxdt+\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} fv(\rho-\delta)dxdt+\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} fv(\rho-\delta)dxdt.$$

Так как

$$\left|\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} fv(\rho-\delta_0)dxdt\right|\le\varepsilon\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} v^2(\rho-\delta_0)dxdt+$$

$$+C(\varepsilon)\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} f^2(\rho-\delta_0)dxdt$$

и

$$\left|\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} fv(\rho-\delta_0)dxdt\right|\le\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} v^2(\rho-\delta_0)dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} f^2(\rho-\delta_0)dxdt,$$

то, выбрав $-\lambda > 0$ настолько большим, чтобы

$$\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}}\left[-\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\rho_{x_i})_{x_j}+(a-\lambda-\varepsilon)(\rho-\delta_0)\right]v^2dxdt\ge$$

$$\ge\int\limits_{\beta}^{\beta_1}\int\limits_{Q^-_{\delta_0}} v^2dxdt,$$

из (13) получим неравенство (12).

Аналогично показывается, что

$$\int\limits_{T-\beta_0}^{T}\int\limits_{Q^+_{\delta_0}} u^2(x,t)dxdt<\infty.$$

Таким образом, из принадлежности обобщенного из $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$ решения $u(x, t)$ уравнения (1) классу H_2 следует $\int\limits_0^T\int\limits_Q u^2(x,t)dxdt<\infty.$

Необходимость вытекает из неравенства (5) леммы 2. Достаточность следует из леммы 3 и неравенства (4) леммы 2.

Теорема 1 доказана.

Пусть функция $u(x, t)$ принимает граничное значение

$$u\,|_{(x,t)\in(Q\times(0,T)}=\phi \tag{14}$$

в смысле L_2 если $\varphi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$ и

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{\partial Q}|u(x_\delta(x),t)-\varphi(x,t)|^2\,dsdt=0. \tag{15}$$

Будем также говорить, что функция $u(x, t)\in V^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ принимает начальные значения

$$u\,|_{t=0,x\in Q^+}=u_1(x);\quad \int\limits_{Q^+} u_1^2(x)r(x)dx<\infty; \tag{16}$$

$$u\,|_{t=T,x\in Q^-}=u_2(x);\quad \int\limits_{Q^-} u_2^2(x)r(x)dx<\infty \tag{17}$$

в среднем с весом $r(x)$, если

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int\limits_{Q^+_\delta}(u(x,\beta)-u_1(x,t))^2r(x)dx=0; \tag{18}$$

$$\lim_{\delta,\beta\to 0}\int\limits_{Q^-_\delta}(u(x,T-\beta)-u_2(x,t))^2r(x)dx=0. \tag{19}$$

Теорема 2. *Существует такая постоянная $a > 0$, что для всех $\phi(x,t)\in L_2(\partial Q\times(0,T))$, $u_1(x)\in L_2(Q^+,r)$, $u_2(x)\in L_2(Q^-,r)$ и для всех $f(x, t)\in L_2(Q^T)$ имеется решение из $V^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ задачи (1) — (4) при $a(x, t) > a_0$. Это решение единственно и для него справедлива оценка*

$$\int\limits_0^T\int\limits_Q\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}r(x)dxdt+$$

$$+\sup_{\beta,\delta}\left(\int\limits_{Q^+_\delta} u^2(x,T-\beta)(r-\delta)dx+\int\limits_{Q^-_\delta} u^2(x,\beta)(r-\delta)dx\right)\le \tag{20}$$

$$\le C[\left\|f\right\|^2_{L_2(Q^T)}+\left\|\varphi\right\|^2_{L_2(\partial Q\times(0T)}+\left\|u_1\right\|^2_{L_2(Q^+_\delta,r(x))}+$$

$$+\left\|u_2\right\|^2_{L_2(Q^-_\delta,r(x))}].$$

Доказательство. Докажем вначале, что существует такое число $a > 0$, что при

$$\left[\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{Q\delta} f^2(x,t)dxdt+M(u)+\int\limits_{\beta}^{T-\beta}\int\limits_{Q\delta} u^2dxdt\right]$$

для обобщенного решения из задач $V^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ и (1), (14), (16), (17) справедливо неравенство (20).

Пусть $u(x, t)$ — обобщенное из $V^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ решение задач (1), (14), (16), (17). В силу (15), (18), (19) функция

$u(x, t)$ принадлежит классу H_2. Поэтому, на основании теоремы 1 справедливы неравенства:

$$\int_0^T\int_Q\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}r(x)dxdt<\infty;$$

$$\int_0^T\int_Q u^2(x,t)dxdt<\infty.$$

Рассмотрим равенство (3). Так как

$$\left|\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta} fu(\rho-\delta)dxdt\right|\le\int_0^T\int_Q u^2(x,t)(\rho-\delta)dxdt+$$
$$+\int_0^T\int_Q f^2(x,t)dxdt.$$

то из (3) следует

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{Q_\delta^+}u^2(x,T-\beta)(\rho-\delta)dx+\frac{1}{2}\int_{Q_\delta^-}u^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx+\\&+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}(\rho-\delta)dxdt+\\&+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}(a-1)u^2(\rho-\delta)dxdt\le C_3\times\\&\times\left[\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}f^2(x,t)dxdt+M(u)+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}u^2dxdt\right].\end{aligned}\tag{21}$$

В силу леммы 3

$$\begin{aligned}&\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}u^2dxdt\le\varepsilon\left[\|f\|^2_{L_2\left(Q^T\right)}+J(u)\right]+\\&+C_1(\varepsilon)\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}u^2(\rho-\delta)dxdt).\end{aligned}\tag{22}$$

Поэтому из (21) имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_{Q_\delta^+}u^2(x,T-\beta)(\rho-\delta)dx+\frac{1}{2}\int_{Q_\delta^-}u^2(x,\beta)(\rho-\delta)dx+\\&+(1-\varepsilon C_3)\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}(\rho-\delta)dxdt+\\&+\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}(a-1-C_1(\varepsilon))u^2(\rho-\delta)dxdt\le\\&\le C_3\left[\int_\beta^{T-\beta}\int_{Q_\delta}f^2(x,t)dxdt+M(u)\right].\end{aligned}\tag{23}$$

Выберем в неравенстве (23) $\varepsilon = 1/2C_3$, $a_0 = 3/2C_1(\varepsilon)C_3$ и, переходя к пределу при $\delta\to 0$ и $\beta\to 0$, получим неравенство (20).

Докажем существование первой смешанной задачи (1), (14), (16), (17) с $a(x, t) > a_0$. Возьмем произвольные функции $\varphi\in L_2(\partial Q\times(0, T))$, $u_1\in L_2(Q^+, \rho)$, $u_2\in L_2(Q^-, \rho)$ и произвольную $f(x, t)\in L_2(Q^T)$.

Пусть $\{\varphi_m\}$ некоторая последовательность функций из $L_2(\partial Q\times(0, T))$, сходящаяся в $L_2(\partial Q\times(0, T))$ к функции φ:

$$|\varphi_m-\varphi\|_{L_2(\partial Q\times(0,T))}\to 0\ \text{ при } m\to\infty;$$

$\{u_{m1}\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\overline{Q^+})$, сходящаяся к функции $u_1(x)$:

$$\|u_{1m}-u_1\|_{L_2(Q^+,\rho)}\to 0\ \text{ при } m\to\infty;$$

$\{u_{m2}\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\overline{Q^-})$, сходящаяся к функции $u_2(x)$:

$$|u_{2m}-u_2\|_{L_2(Q^-,\rho)}\to 0\ \text{ при } m\to\infty;$$

$\{f_m(x, t)\}$ — некоторая последовательность функций из $C^2(\overline{Q^T})$, сходящаяся к функции $f(x, t)$:

$$|f_m-f\|_{L_2(Q^T)}\to 0\ \text{ при } m\to\infty.$$

Обозначим через $u_m(x, t)$ решения из $W_2^{2,1}(Q^T)$ задачи (1), (14), (16), (17). Такие решения существуют (см. [4, 5]) и для них справедливы неравенства (20). Следовательно, последовательность $\{u_m(x, t)\}$ сходится к некоторой фунции $u(x, t)$ в гильбертовом пространстве B с нормой

$$\begin{aligned}&|u\|_B^2=\int_0^T\int_Q\sum_{i,j=1}^n a_{i,j}u_{x_i}u_{x_j}\rho(x)dxdt+\\&+\sup_{\beta,\delta}\left(\int_{Q_\delta^+}u^2(x,T-\beta)(r-\delta)dx+\int_{Q_\delta^-}u^2(x,\beta)(r-\delta)dx\right)+\\&+\int_0^T\int_Q u^2(x,t)dxdt,\end{aligned}$$

т.е.

$$|u_m-u\|_B\to 0 \text{ при } m\to\infty,$$

являющейся решением из $V^{1,0}_{2,loc}(Q^T)$ уравнения (1).

Отметим, как показано в работах И. Е. Егорова [4], и С. Г. Пяткова [5], если правая часть уравнения (1) $f(x, t)$ принадлежит пространству $L_{2,loc}(Q^T)$, то решение $u(x, t)$ принадлежит пространству $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$.

Следовательно, функция $u(x, t)$ является обобщенным решением из $W^{2,1}_{2,loc}(Q^T)$, принадлежащим классу Харди H_2.

Удовлетворение соотношениям (15), (18), (19) $\rho(x)=r(x)$, $x\in\overline{Q}\setminus Q_{\delta 0}$, $\rho(x)\in C^2(\overline{Q})$ очевидно. Теорема 2 доказана.

Из теоремы 2, аналогично тому, как это выполнено в работе [8], доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если функция* $u(x,\ t)$ *является обобщенным из* $V_{2,loc}^{1,0}(Q^T)$ *решением задач (1), (14), (16), (17) с* $a(x,\ t) > a_0$, *то существуют такие функции* $u_3(x) \in L_2(Q^+, r),\ u_4(x) \in L_2(Q^-, r),$ *что*

$$\lim_{\delta,\beta \to 0} \int_{Q_\delta^+} (u(x, T-\beta) - u_3(x,t))^2 (\rho(x) - \delta) dx = 0;$$

$$\lim_{\delta,\beta \to 0} \int_{Q_\delta^-} (u(x, \beta) - u_4(x,t))^2 (\rho(x) - \delta) dx = 0.$$

Литература

1. **Михайлов В.П.** О граничных значениях решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с гладкой границей // Математический сборник. 1976. Т. 101 (143). № 2 (10). С.163 — 188.

2. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

3. **Терсенов С.А.** Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985.

4. **Егоров И.Е., Федоров В.Е.** Введение в теорию уравнений смешанного типа второго порядка. Якутск: ЯГУ, 1998.

5. **Пятков С.Г.** О разрешимости одной для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // ДАН СССР. 1985. Е. 285. № 6. С. 1322 — 1327.

6. **Пятков С.Г.** Разрешимость начально-краевых задач для одного нелинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: НГУ, 1987.

7. **Кислов Н.В.** Неоднородные краевые задачи для дифференциально-операторного уравнения смешанного типа и их приложения // Математический сборник. 1984. Т. 125. Вып. 1. С. 19 — 37.

8. **Петрушко И.М., Черных Е.В.** О начально-краевой задаче для уравнений с меняющимся направлением времени // Вестник МЭИ. 2000. № 6. С. 60 — 70.

9. **Петрушко И.М.** О граничных и начальных значениях решений параболических уравнений // Математический сборник. 1984. Т. 125 (167). С. 489 — 521.

Статья поступила в редакцию 23.10.2015