

УДК 519.217:621.891.001.1

DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-101-110

Марковская модель изменения шероховатых поверхностей при механическом взаимодействии

Ю.А. Горицкий, К.В. Гаврилов, Ю.С. Исмаилова, О.В. Шевченко

Описан общий подход к построению модели взаимодействия шероховатых поверхностей, приводящий к анализу марковского процесса. Дано новое обоснование марковости. Поверхность представляется случайной, состоящей из совокупности элементов (неровностей, выступов) со случайными состояниями. Элементы поверхностей, контактируя между собой, изменяют друг друга. При различных конкретизациях того, что есть состояние элемента (выступа) и что есть функции взаимодействия двух элементов, можно получить описание различных взаимодействий (механических, тепловых, электрических) всей поверхности. Подход приводит к марковскому процессу с рекуррентным во времени пересчетом распределения вероятностей для его состояний. По распределению вероятностей можно оценивать во времени различные характеристики взаимодействия.

Подход применяется к процессу трения. Любой выступ одной поверхности подвергается воздействию движущихся выступов другой со случайными состояниями (высотами). Взаимодействие выступов (в результате механического контакта) происходит только между самыми высокими, и при контакте выступ изменяется с весьма малой вероятностью. По этой причине предполагается, что поток изменений любого элемента поверхности является пуассоновским. Следующее состояние — результат взаимодействия предыдущего состояния и очередного воздействия некоторым выступом другой поверхности. Результат описывается известной функцией взаимодействия. Если последовательные воздействия — независимые случайные величины, то процесс изменений состояния является марковским, и потому распределение рекуррентно пересчитывается, причем переходные вероятности зависят от распределения высот другой поверхности. Поскольку влияние поверхностей взаимно, аналогичный пересчет справедлив и для любого выступа другой поверхности. Таким образом, имеет место пересчет двух распределений, где оператор пересчета одной поверхности зависит от распределения другой. Характеристики трения в любой момент времени определяются по распределениям. Подход конкретизирован к режиму усталостного разрушения, при котором элемент поверхности разрушается после многократных контактов порядка многих миллионов. Обоснован выбор интервала дискретизации пересчета распределений, существенно ускоряющий численный анализ модели ценой изменения матрицы переходных вероятностей. Выписаны уравнения Колмогорова – Феллера для модели усталостного разрушения. В качестве примера применения модели контактного взаимодействия проанализирован процесс изнашивания направляющей поршня в дизеле ЧН 13/15 и выполнена оценка триботехнических параметров, определяющих ресурс сопряжения «поршень – цилиндр».

Ключевые слова: шероховатые поверхности, взаимодействие выступов, распределение высот, марковский процесс, рекуррентный пересчет распределений, уравнение Колмогорова – Феллера, режим усталостного разрушения, износ поршня двигателя.

Для цитирования: Горицкий Ю.А., Гаврилов К.В., Исмаилова Ю.С., Шевченко О.В. Марковская модель изменения шероховатых поверхностей при механическом взаимодействии // Вестник МЭИ. 2017. № 5. С. 101—110. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-101-110.

The Markov Model for Alteration of Rough Surfaces during Their Mechanical Interaction

Yu.A. Goritsky, K.V. Gavrillov, Yu.S. Ismailova, O.V. Shevchenko

A general approach to constructing a model describing interaction of rough surfaces that involves a Markov process analysis is described, and a new substantiation of the Markov-like behavior of the interaction is given. The surface is represented as a random one, consisting of the totality of elements (irregularities and protrusions) with random states. The surface elements change each other as they come in contact with one another. A description for different interactions (mechanical, thermal, and electrical) on the entire surface can be obtained by specifying in different ways the state of an element and the functions of interaction between two elements. This approach involves a Markov process with recalculating the distribution of the probabilities of its states in a time-recurrent manner. The obtained distribution of probabilities can be used for estimating different characteristics of interaction as a function of time.

The developed approach is applied to a friction phenomenon. Any protrusion on one surface is subjected to the influence of moving protrusions on the other surface, which are characterized by random states (heights). Interaction only occurs between the highest protrusions as they come in mechanical contact with each other, and their change resulting from the coming in contact takes place with a low probability. This gives grounds to assume that the changes occurring in any surface element can be described in terms of a Poisson flow. The element's next state is the result of interaction between the previous state and the next effect caused by some protrusion on the other surface. The result is described by a known interaction function. If the sequential interactions are independent random quantities, the state variation process is a Markov process. Therefore, the probability distribution can be recalculated in a recurrent way, and it should be noted that the transition probabilities depend on the distribution of heights on the other surface. Since the surfaces mutually affect each other, a similar recalculation is valid for any protrusion on the other surface. Thus, recalculation of two distributions is obtained, in which the recalculation operator for one surface depends on the distribution for the other surface. The friction characteristics at any moment of time can be calculated from the obtained distributions.

The approach is applied to a particular case of fatigue failure conditions under which a surface element is destroyed after having come in a

large number (several million) of contacts. The choice of the distribution recalculation quantization interval the use of which makes it possible to significantly speed up the numerical analysis for a model at the expense of changing the transition distribution matrix is substantiated. The Kolmogorov–Feller equations for the fatigue failure model are written. The application of the contact interaction model is illustrated on the example of analyzing the piston guide wearing process in a ChN 13/15 diesel engine with evaluating the tribotechnical parameters determining the «piston–cylinder» mating life.

Key words: rough surfaces, interaction of protrusions, protrusion height distribution, Markov process, recurrent recalculation of distributions, Kolmogorov–Feller equation, fatigue failure conditions, engine piston wear.

For citation: Goritsky Yu.A., Gavrilov K.V., Ismailova Yu.S., Shevchenko O.V. The Markov Model for Alteration of Rough Surfaces during Their Mechanical Interaction. MPEI Vestnik. 2017;5:101–110. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-101-110.

Введение

Описан подход к построению модели взаимодействия шероховатых поверхностей для одной из задач расчета трибосопряжений поршневых двигателей, предложенный в [1–3]. Поверхность представляется неоднородной, состоящей из совокупности элементов (неровностей, выступов) со случайными состояниями. Элементы поверхностей, контактируя между собой, изменяют друг друга. В результате анализа состояния элемента (выступа) и функции взаимодействия двух элементов можно получить описание различных взаимодействий (механических, тепловых, электрических) всей поверхности. Подход приводит к марковскому процессу с рекуррентным во времени пересчетом распределения вероятностей для его состояний. По распределению вероятностей можно оценить во времени различные характеристики взаимодействия.

Подход обладает весьма общим характером, однако изначальная цель построения математической модели состояла в ее использовании для инженерных расчетов изменения во времени характеристик конкретного процесса: трения. При разработке узлов машин и механизмов, где трение определяет долговечность и габариты, нужны методы, позволяющие по характеристикам микрогеометрии поверхностей, физическим свойствам материалов и внешним условиям (давлению, скорости проскальзывания) оценивать во времени различные характеристики: силу и коэффициент трения, площадь контакта, время притирки, износ и т. д. Подход, используемый в настоящей работе, обсуждался механиками на семинаре по трению в Институте машиноведения РАН, прошел рецензирование в журнале и был защищен в рамках диссертации Д. Тигетова [2, 4].

Существуют подходы, основанные на представлении рельефа функцией, случайной по пространственному аргументу [5, 6]. Подобные модели позволяют оценить площадь контакта, силу трения, коэффициент трения, износ и т. д, но при этом не учитывают изменения поверхностей во времени, а следовательно, и изменения характеристик контакта и трения. Так возникла идея модели в виде случайного во времени процесса изменения высот, она была реализована в [1–3]. В настоящей работе модель применяется для анализа усталостного режима и оценки долговечности поршня двигателя внутреннего сгорания.

Общий подход

Приведем новое обоснование марковости. Поверхности представляются совокупностями элементов (выступов) со случайными состояниями (выбрана высота выступа, однако кроме нее состояние можно дополнить другими параметрами). Зафиксируем любой выступ нижней поверхности ξ . Он подвергается воздействию движущихся выступов верхней поверхности η со случайными высотами. Взаимодействие выступов в результате механического контакта происходит только между самыми высокими выступами, доля которых составляет единицы процентов, и при контакте выступ меняется с весьма малой вероятностью. По этой причине предполагается, что поток изменений высоты фиксированного элемента поверхности ξ является пуассоновским.

В этом предположении мы опираемся на два факта. Из теории выбросов известно, что поток выходов случайного процесса за некоторый уровень x при увеличении x (когда вероятность превышения мала) при широких условиях сходится к пуассоновскому потоку. Кроме того, если есть во времени какой-либо поток событий (в данном случае поток контактов) и он «прореживается» с малой вероятностью, то результирующий поток (поток изменения высоты выступа) оказывается приближенно пуассоновским.

Пусть $\xi(t)$ — состояние (высота) зафиксированного произвольного выступа нижней поверхности ξ в момент t . Обозначим через $t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots$ пуассоновские моменты, т. е. моменты, когда $\eta(t) < \xi(t)$ воздействия на него выступов поверхности η (для таких моментов используется индекс k); $\xi_k \equiv \xi(t_k)$ — новое состояние в момент t_k ; $\eta_k = \eta(t_k)$ — уровень в момент t_k противоположащего движущегося элемента верхней поверхности. Следующее состояние ξ_{k+1} — результат взаимодействия предыдущего состояния ξ_k и очередного воздействия состоянием η_k :

$$\xi_{k+1} = \Psi(\xi_k, \eta_k), \quad (1)$$

где $\Psi(\cdot)$ — функция взаимодействия, описывающая результат действия выступов η_n на ξ_n . Если последовательность состояний $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k, \dots$ — независимые случайные величины, то процесс $\xi(t)$ является марковским, и для анализа можно использовать математический аппарат марковских процессов.

Учитывая, что не только поверхность η влияет на ξ , но и наоборот, можно для любого зафиксированного элемента поверхности η записать аналогичное соотношение

$$\eta_{m+1} = \Phi(\eta_m, \xi_m), \quad (2)$$

где $\eta_m \equiv \eta(t_m)$, $\eta(t)$ — состояния в момент t_m и t ; $t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots$ — пуассоновские моменты воздействия выступов поверхности ξ (в данном случае используется индекс m); $\Phi(\eta_m, \xi_m)$ — функция взаимодействия, описывающая результат действия выступов ξ_m на η_m . Формулы (1), (2) отражают преобразование высот контактирующих элементов в общем виде, функции Ψ и Φ можно детализировать различными способами.

Изменения, выраженные (1), (2), записаны для разных последовательностей моментов времени. Пусть они лежат в единой временной шкале. Процесс $\xi(t)$ изменения состояния фиксированного выступа представляется следующим образом: состояние может меняться в моменты пуассоновского потока; $\lambda_\xi(t, x)$ — параметр потока, зависящий от $\xi(t) = x$ в момент t ; Δt — дискретность по времени, настолько малая величина, что вероятностью для любого выступа получить более одного изменения можно пренебречь. Обозначим $t_n = n\Delta t$; $\xi_n \equiv \xi(t_n)$; $\eta_n \equiv \eta(t_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, тогда состояние ξ_{n+1} в следующий момент t_{n+1} , в силу пуассоновости моментов переключения будет выглядеть как

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \Psi(\xi_n, \eta_n) = \\ &= \xi_n - \begin{cases} w_\xi & \text{с вероятностью } \lambda_\xi(t, x)\Delta t + o(\Delta t); \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \lambda_\xi(t, x)\Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

Предположим, что последовательность возмущающих выступов — независимые случайные величины. В этом случае процесс $\xi(t)$ является марковским с непрерывным временем. Для предварительного анализа примем множество возможных состояний дискретным; тогда последовательность ξ_n станет простой цепью Маркова с рекуррентным пересчетом вектора строки p_n вероятностей состояний

$$p_{n+1} = p_n \Pi_\xi(q_n, \Psi), \quad (4)$$

где $\Pi_\xi(q_n, \Psi)$ — матрица вероятностей переходов, зависящая от распределения q_n возмущений и функции Ψ .

Аналогичные рассуждения справедливы также для процесса $\eta(t)$ изменения состояния фиксированного выступа поверхности η . Состояние может меняться в моменты пуассоновского потока воздействий элементов поверхности ξ (т. е. в моменты, когда появляется контакт с выступом поверхности ξ). Пусть $\lambda_\eta(t, x)$ — параметр потока, зависящий от состояния $\eta(t) = x$ в момент t . Состояние η_{n+1} в следующий момент t_{n+1} в силу пуассоновости моментов переключения

$$\begin{aligned} \eta_{n+1} &= \Phi(\eta_n, \xi_n) = \\ &= \eta_n + \begin{cases} w_\eta & \text{с вероятностью } \lambda_\eta(t, x)\Delta t + o(\Delta t); \\ 0 & \text{с вероятностью } 1 - \lambda_\eta(t, x)\Delta t + o(\Delta t). \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Принимая состояния дискретными, последовательность η_n становится цепью Маркова с пересчетом вектора-строки q_n вероятностей состояний:

$$q_{n+1} = q_n \Pi_\xi(p_n, \Phi), \quad (6)$$

где $\Pi_\xi(p_n, \Phi)$ — матрица вероятностей переходов, зависящая от распределения q_n возмущений и функции Φ . Соотношения (4), (6) определяют эволюцию соответствующих распределений $p_n(x)$ и $q_n(y)$. По распределениям p_n, q_n оценивают необходимые характеристики трения [2, 3].

Модель усталостного разрушения

Рассмотрим взаимодействие поверхностей при действии усталостного разрушения, возникающего в результате многократной деформации выступов; нагрузка предполагается постоянной. Полагаем, что усталостное разрушение состоит в том, что при контакте выступов с малой вероятностью происходит отрыв частицы и высота выступа уменьшается на случайную величину W_ξ . Тогда

$$\xi_n \geq \xi_{n+1} = \Psi(\xi_n, \eta_n) = \xi_n - W_\xi \varepsilon(\delta_n) + h_n/2, \quad (7)$$

где $\delta_n = \xi_n - \eta_n$ — контактное пересечение в момент t_n ; W_ξ — величина уменьшения уровня элемента (частицы разрушения); h_n — величина сближения поверхностей, обеспечивающая постоянство силы сопротивления сближению под действием нормальной нагрузки; $\varepsilon(\delta_n)$ — случайная величина,

$$\varepsilon(\delta_n) = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью } P_{w_\xi}, \text{ если } \delta_n > 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Эта запись означает, что если контакт состоялся, т. е. $\delta_n > 0$, то с вероятностью P_{w_ξ} происходит разрушение (уменьшение высоты) на случайную величину W_ξ , распределенную с плотностью $p_{w_\xi}(u)$. Соответствующие переходные вероятности для цепи Маркова ξ_n

$$\begin{aligned} \pi_{\xi_n}(x, y) &= P\{\xi_{n+1} \equiv \Psi(\xi_n, \eta_n) = y | \xi_n = x\} = \\ &= P\{x - W_\xi \varepsilon(x - \eta_n) = y\} = P\{W_\xi \varepsilon(x - \eta_n) = x - y\} = \\ &= \begin{cases} 0; & y > x; \\ 1 - P_{w_\xi} F_{\eta_n}(x); & y = x; \\ P_{w_\xi} F_{\eta_n}(x); & y = x - W_\xi, \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

где $P\{\delta_n > 0 | \xi_n = x\} = \sum_{z: z < x} q_n(z) = F_{\eta_n}(x)$ — вероятность контакта при условии $\xi_n = x$.

Обозначив $p_n(y) \equiv P\{\xi_n = y\}$, получим соотношение пересчета p_n в p_{n+1} :

$$\begin{aligned} p_{n+1}(y) &= \sum_x p_n(x) \pi_{\xi_n}(x, y) = \\ &= p_n(y) \left[1 - P_{w_\xi} F_{\eta_n}(y) \right] + \\ &+ p_n(y + w_\xi) P_{w_\xi} F_{\eta_n}(y + w_\xi). \end{aligned} \quad (10)$$

Соотношения, аналогичные (7), (10), можно записать для фиксированного элемента поверхности η (с очевидным различием в знаках приращений):

$$\eta_n \leq \eta_{n+1} = \Phi(\xi_n, \eta_n) = \eta_n + W_\eta(\delta_n) - h_n \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (11)$$

$$q_{n+1}(y) = \sum_x q_n(x) \pi_{\xi_n}(x, y) = q_n(y) [1 - P_{w\eta} T_{\xi_n}(y)] + q_n(y - w_\xi) P_{w\eta} T_{\xi_n}(y - w_\xi). \quad (12)$$

Определим величину h_n из (7), (11). Взаимодействие происходит под действием постоянной нагрузки. В его процессе в силу постепенного уменьшения высот за время Δt уменьшаются контактное пересечение и сила сопротивления сближению, которые компенсируются сближением поверхностей на величину h_n . Пусть $f(\delta)$ ($f(\delta) = c\delta$ при $\delta > 0$ и 0, иначе) — сила нормальной реакции при взаимодействии двух выступов. Смещение h_n должно быть равно среднему суммарному уменьшению контактного пересечения за счет разрушения:

$$h_n = (W_\xi P_{w\xi} + W_\eta P_{w\eta}) P\{\delta_n > 0\}.$$

Переходные вероятности за произвольное время Δt

Вероятность P_w изменения состояния в момент контакта чрезвычайно мала (10^{-6} и меньше), поэтому если пересчет распределений проводить в пуассоновские моменты, то вычислительный процесс катастрофически затянется. Имеет смысл делать пересчет через промежуток времени Δt , за который происходит хотя бы одно изменение состояния. Однако матрица переходных вероятностей при этом меняется и ее требуется найти.

Пусть $\xi(t)$ — состояние выступа поверхности ξ в момент t ; $p(t)$ — соответствующий вектор распределения. Введем Δt — дискретность по времени, обозначим $t_N = N\Delta t$; $\xi_N = \xi(t_N)$; $p_N = p(t_N)$, где $N = 0, 1, 2, \dots$. Среднее число выступов, проходящих за время Δt на обеих поверхностях,

$$n_\xi = \Delta L / \Delta s_\xi; \quad n_\eta = \Delta L / \Delta s_\eta,$$

где $\Delta s_\xi, \Delta s_\eta$ — средние расстояния между выступами для поверхностей ξ, η ; $\Delta L = V\Delta t$ — дискретность пути трения; V — скорость движения.

Марковская последовательность высот ξ_N подчиняется соотношению

$$\xi_{N+1} = \zeta_N - W_\xi \sum_{i=1}^{n_\xi} \varepsilon_{\xi_N, i} = \xi_N - W_\xi E_{\xi_N}, \quad (13)$$

$$N = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\varepsilon_{\xi_N, i}$ — результат действия на состояние ξ_N i -го возмущающего выступа поверхности η на N -м интервале

$(t_N, t_N + \Delta t)$, всего их n_η ($\varepsilon_{\xi_N, i}$ равен 0 или 1); $E_{\xi_N} = \sum_{i=1}^{n_\eta} \varepsilon_{\xi_N, i}$

имеет смысл количества разрушений на N -м интервале $(t_N, t_N + \Delta t)$ при условии, что $\xi_N = x$. Поскольку вероятность $p = P\{\varepsilon_{N, i} = 1\} = P_{w\xi} F_{\eta N, i}(x)$ мала, а количество выступов n_η можно увеличить, выбрав Δt , то E_{ξ_N} подчиняется закону Пуассона с параметром

$$a_{\xi_N} = ME_{\xi_N} = P_{w\xi} \sum_{i=1}^{n_\eta} F_{\eta N, i}(x) = n_\eta P_{w\xi} F_{\eta N}(x) = (\Delta L / \Delta s_\eta) P_{w\xi} F_{\eta N}(x). \quad (14)$$

В данном случае $F_{\eta N, i}(x)$ не меняется в течение Δt , т. е. $F_{\eta N, i}(x) = F_{\eta N}(x)$.

Если Δt таково, что параметр a_{ξ_N} существенно меньше 1, то за время Δt и путь ΔL с большой вероятностью разрушение не произойдет. Разумным значением Δt можно считать такое, при котором происходит в среднем одно элементарное разрушение, т. е. $a_{\xi_N} \approx 1$. Однако при таком выборе за время Δt может произойти более одного разрушения, поэтому в (13) учтем

$$r_{\xi_N, k} \equiv P\{E_{\xi_N} = k\} = (a_{\xi_N})^k e^{-a_{\xi_N}} / k!, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Если $a_{\xi_N} < 1$, то $P\{E_{\xi_N} > k_{\max} = 3\} \leq 0,019$ и событием $E_{\xi_N} > k_{\max}$ можно при вычислениях пренебречь, это позволит принять

$$E_{\xi_N} = \sum_{i=1}^{n_\eta} \varepsilon_{N, i} = k \text{ с вероятностью } r_{\xi_N, k}, \quad (16)$$

$$k = 1, 2, 3, \text{ иначе } 0.$$

Аналогично (13) последовательность высот η_N подчиняется соотношению

$$\eta_{N+1} = \eta_N + W_\eta \sum_{i=1}^{n_\eta} \varepsilon_{\eta_N, i} = \eta_N + W_\eta E_{\eta_N}, \quad (17)$$

$$N = 0, 1, 2, \dots,$$

где $E_{\eta_N} = \sum_{i=1}^{n_\xi} \varepsilon_{\eta_N, i}$ — количество разрушений на N -м интервале при условии, что $\eta_N = x$; E_{η_N} подчиняется закону Пуассона с параметром

$$a_{\eta_N} = ME_{\eta_N} = P_{w\eta} \sum_{i=1}^{n_\xi} T_{\xi_N, i}(x) = n_\xi P_{w\eta} T_{\xi_N}(x) = (V\Delta t / \Delta s_\xi) P_{w\eta} T_{\xi_N}(x), \quad (18)$$

причем $r_{\eta_N, k} \equiv P\{E_{\eta_N} = k\} = (a_{\eta_N})^k e^{-a_{\eta_N}} / k!, k = 0, 1, 2, \dots$

Сравнивая (7), (8) с (13), (16), получим, что это процессы одного типа и различаются только количеством значений случайного приращения. Переходные вероятности для цепи Маркова ξ_N :

$$\begin{aligned} \pi_{\xi N}(x, y) &= P\{\xi_{N+1} = y | \xi_N = x\} = \\ &= P\{x - W_{\xi} E_{\xi N} = y\} = P\{W_{\xi} E_{\xi N} = x - y\} = \\ &= \begin{cases} 0; \\ 1 - \sum_{k=1}^3 r_{\xi N, k}, & k = 1, 2, 3; \\ r_{\xi N, k}, & y = x - kW_{\xi}, k = 1, 2, 3. \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

Нетрудно записать аналогичные вероятности для $\pi_{\eta N}(x, y)$.

Для выбора Δt (или дискретности ΔL пути трения) есть условие

$$\max \left[\max_{N, x} a_{\xi N}, \max_{N, x} a_{\eta N} \right] \leq 1. \quad (20)$$

С учетом (14), (18) и равенств $\max_x F_{\eta N}(x) = \max_x T_{\xi N}(x) = 1$ получим дискретность пути трения

$$\Delta L = V \Delta t \leq \min \left[\Delta s_{\eta} / P_{w_{\xi}}, \Delta s_{\xi} / P_{w_{\eta}} \right]. \quad (21)$$

Непрерывная модель: уравнение Колмогорова – Феллера

Получим уравнения относительно плотностей распределений $p_{\xi}(x, t)$ и $q_{\eta}(x, t)$, не используя дискретизацию времени и множества состояний. Обозначим $T_{\xi}(x, t) = \int_{u>x} p_{\xi}(u, t) du$, $F_{\eta}(x, t) = \int_{u<x} q_{\eta}(u, t) du$ — соответствующие интегральные функции. Если говорить о поведении случайной функции $\xi(t)$ — высоты фиксированного элемента, то она остается постоянной, испытывая в моменты пуассоновского потока скачки $-W_{\xi}(\delta) + h(t)/2$ случайной амплитуды. В формуле (3) при $\xi_n = x$ выражение имеет смысл вероятности появления скачка состояния за малый промежуток времени Δt :

$$\begin{aligned} &\lambda_{\xi}(t, x) \Delta t + o(\Delta t) = \\ &= P\{\delta_n \equiv \xi_n - \eta_n > 0 | \xi_n = x\} P_{w_{\xi}} = P_{w_{\xi}} F_{\eta}(x, t), \end{aligned}$$

откуда параметр потока скачков, если $\Delta t = \Delta x/V$ и $m_T = V/\Delta x$,

$$\lambda_{\xi}(t, x) = P_{w_{\xi}} F_{\eta}(x) / \Delta t = m_T P_{w_{\xi}} F_{\eta}(x, t), \quad (22)$$

где $m_T = V/\Delta x$ — масштабный коэффициент.

Условная плотность $h_{\xi}(x|u)$ перехода из u в x при условии, что происходит скачок (т. е. отрыв частицы W_{ξ}); величина скачка случайна с плотностью $p_{w_{\xi}}(z)$:

$$h_{\xi}(x|u) = p_{w_{\xi}}(u-x), \text{ если } x < u \text{ и } 0, \text{ иначе.} \quad (23)$$

Уравнение Колмогорова – Феллера для плотности $p_{\xi}(x, t)$ марковского процесса $\xi(t)$ со скачками в точках потока, параметр которого $\lambda_{\xi}(t, x)$, и с плотностью $h_{\xi}(x|u)$ условного перехода из u в x имеет вид

$$\partial p_{\xi} / \partial t = -\lambda_{\xi} p_{\xi} + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_{\xi}(u, t) p_{\xi}(u, t) h_{\xi}(x|u) du. \quad (24)$$

С учетом (22), (23) для (24) получим

$$\begin{aligned} \partial p_{\xi} / \partial t &= \\ &= -m_T P_{w_{\xi}} \left[F_{\eta} p_{\xi} - \int_{u>x} F_{\eta}(u, t) p_{w_{\xi}}(u-x) p_{\xi}(u, t) dx \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Аналогично получим уравнения для $q_{\eta}(x, t)$:

$$\begin{aligned} \partial q_{\eta} / \partial t &= \\ &= -m_T P_{w_{\eta}} \left[T_{\xi} q_{\eta} - \int_{u>x} T_{\xi}(u, t) p_{w_{\eta}}(x-u) q_{\eta}(u, t) du \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Если под интегралом в качестве $p_{w_{\xi}}$ и $p_{w_{\eta}}$ принять распределения, сосредоточенные в точках $W_{\xi 0}$ и $W_{\eta 0}$, то уравнения (25), (26) будут выглядеть как

$$\begin{aligned} \partial p_{\xi} / \partial t &= \\ &= -m_T P_{w_{\xi}} \left[F_{\eta}(x, t) p_{\xi}(x, t) - \right. \\ &\quad \left. - F_{\eta}(x + W_{\xi 0}, t) p_{\xi}(x + W_{\xi 0}, t) \right]; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \partial q_{\eta} / \partial t &= -m_T P_{w_{\eta}} \left[T_{\xi}(x, t) q_{\eta}(x, t) \right. \\ &\quad \left. - T_{\eta}(x - W_{\eta 0}, t) q_{\eta}(x - W_{\eta 0}, t) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

При малых значениях $W_{\xi 0}$ и $W_{\eta 0}$ квадратные скобки — малое приращение произведений $\Delta F_{\eta} p_{\xi}$ и $\Delta T_{\eta} q_{\xi}$. Приближенная система:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\xi}}{\partial t} &= m_T P_{w_{\xi}} W_{\xi 0} \frac{\partial}{\partial x} (F_{\eta} p_{\xi}); \\ \frac{\partial q_{\eta}}{\partial t} &= -m_T P_{w_{\eta}} W_{\eta 0} \frac{\partial}{\partial x} (T_{\xi} q_{\eta}). \end{aligned}$$

Начальные условия. При $t = 0$ $p_{\xi}(x, 0) = p_{\xi 0}(x)$, $q_{\eta}(x, 0) = q_{\eta 0}(x)$ — исходные плотности распределения,

$$T_{\xi}(x, 0) = T_{\xi 0}(x) = \int_{u>x} p_{\xi 0}(u) du;$$

$$F_{\eta}(x, 0) = F_{\eta 0}(x) = \int_{u<x} q_{\eta 0}(u) du.$$

Граничные условия на концах отрезка $[0, L]$:

$$p_{\xi}(0, t) = q_{\eta}(0, t) = p_{\xi}(L, t) = q_{\eta}(L, t) = 0;$$

$$T_{\xi}(L, t) = 1, F_{\eta}(0, t) = 0.$$

Для численного решения уравнений используется простая схема метода сеток. По пространственной координате x вводится равномерная сетка с $N+1$ узлами, шагом Δx (для приведенного ниже решения $N = 600$, $\Delta x = 10^{-8}$ м) и дискретностью Δt по времени. В результате получим пересчет по формулам (10), (12), соответствующим дискретной цепи Маркова. Для произвольного момента времени t результатом решения

уравнений будут распределения $p_{\xi}(x, t)$ и $q_{\xi}(x, t)$, по которым можно оценить характеристики трения: шероховатость, площадь контакта, среднее значение величины контактного пересечения, силу и коэффициент трения, длительность режима приработки [2, 3].

Пример анализа процесса изнашивания поршня дизеля и оценка параметров трения, определяющих его ресурс

Рассмотрен износ поверхности направляющей поршня сопряжения поршень–цилиндр. Предполагается, что начальный короткий процесс приработки, в котором происходят пластические деформации, уже прошел, и взаимодействие между элементами поверхностей вошло в фазу упругих деформаций и усталостного разрушения. Анализируемое сопряжение работает большую часть времени в гидродинамическом режиме смазки, однако на поршне после определенной наработки присутствуют следы натира (рис. 1). Это свидетельствует о возникновении в некоторые моменты времени режимов смешанного и граничного трения. На рис. 2 изображены схема движения поршня в цилиндре и действие силы, прижимающей поршень к цилиндру. Максимальное значение этой силы приходится на начало такта расширения рабочего цикла. В [7–10] описана методика расчета траектории движения поршня на смазочном слое и получена зависимость минимальной толщины смазочного слоя h_{\min} по углу поворота коленчатого вала α при движении поршня в цилиндре дизеля (рис. 3). В начале рабочего хода (область, отмеченная штриховкой), когда боковая сила возрастает, достигая величины порядка 5000...7000 Н [10], толщина h_{\min} смазочного слоя оказывается меньше суммарного значения $R_{\max} = 15$ мкм высот микронеровностей сопрягаемых поверхностей, и возникает режим граничного трения на протяжении $L = 2$ см движения поршня. Величина R_{\max} определялась профилометрированием образцов поршня и гильзы цилиндра с использованием электронного микроскопа Leica DCM 3D и специального программного обеспечения. Именно в эти промежутки времени появляется граничное трение, приводящее к натир. Данное явление изучаем с помощью приведенной марковской модели.



Рис. 1. Результат контактного взаимодействия поршня и гильзы цилиндра дизеля

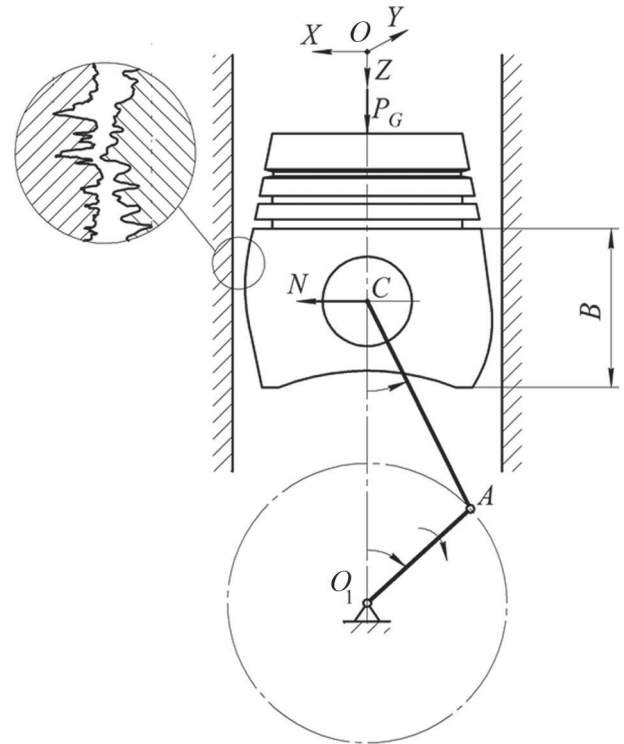


Рис. 2. Схема движения поршня и появления прижимающей силы

В описываемой модели предполагается циклический сдвиг поверхностей. В описываемом примере происходит многократное прохождение L в одну сторону вблизи верхней мертвой точки, что соответствует 30° поворота коленчатого вала (см. рис. 3, заштрихованная область), т. е. взаимодействие на пути длиной L области поверхности юбки поршня с поверхностью гильзы цилиндра. Получим следующую схему взаимного движения: тело A из исходного положения проходит с трением по телу B некоторое расстояние L , а затем без трения возвращается в исходное положение; все повторяется многократно. Таким образом, данный процесс укладывается в модель. Режим граничного трения приводит к натир, т. е. локальному износу поршня. Если износ достигает определенной глубины $H_{\text{кр}}$, то ресурс трибосопряжения поршень–цилиндр — своего предельного значения. Цель расчетов заключается в оценке изменения триботехнических параметров сопряжения поршень–цилиндр и определении его ресурса. Будем считать, что ресурс — это путь трения $L_{\text{тр}}$, при котором локальный износ поршня равен $H_{\text{кр}}$, в данном случае $H_{\text{кр}} = 6,4$ мкм [10].

Исходные данные для расчетов взяты на основании профилограмм поверхностей юбки поршня и гильзы цилиндра. Обозначим принадлежность к поверхностям гильзы цилиндра ξ , а юбки поршня — η . Тогда размах высот урвней неровностей поверхностей, определенных по 10 максимальным выбросам, $Rz_{\xi} = 10$ мкм, $Rz_{\eta} = 5$ мкм; среднее квадратическое отклонение профилей $\sigma_{\xi} = 1,7$ мкм, $\sigma_{\eta} = 0,6$ мкм; вероятности разруше-

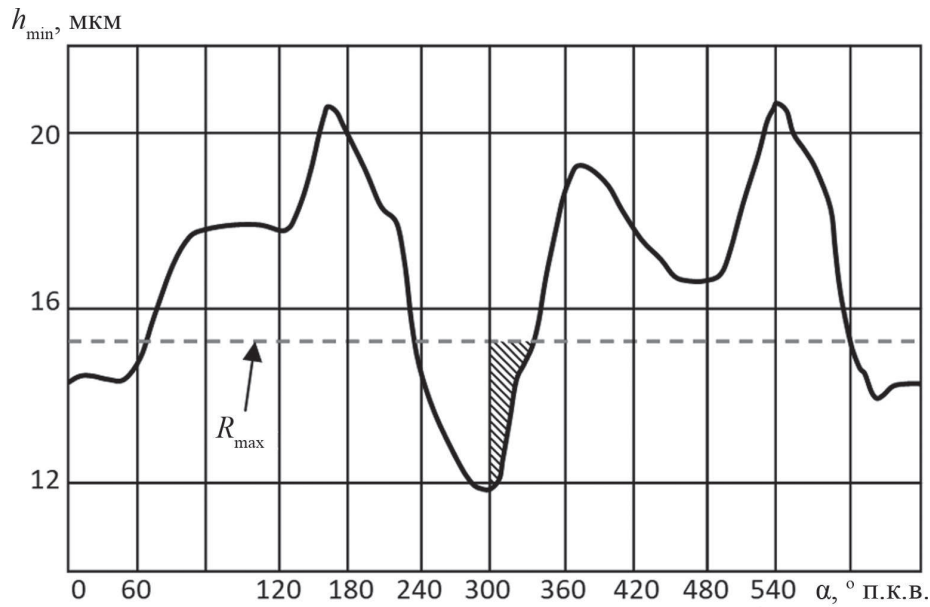
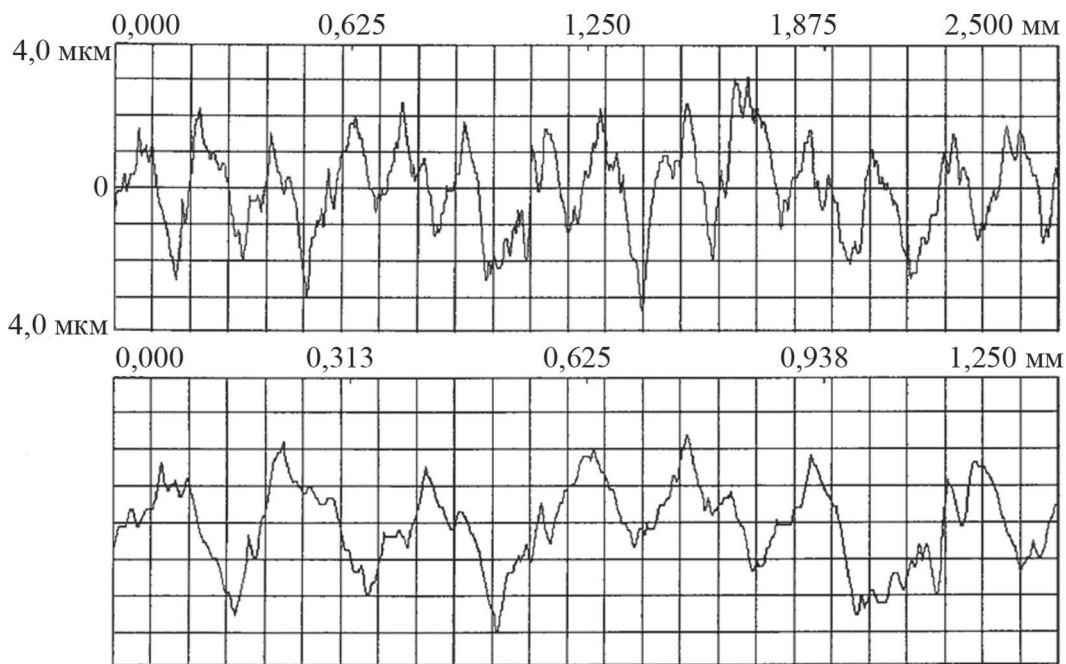
Рис. 3. Зависимость h_{\min} от угла поворота коленчатого вала α на режиме максимальной мощности

Рис. 4. Пример профилограммы

ния при контакте $P_{w\xi} = 0,7 \cdot 10^{-9}$, $P_{w\eta} = 0,7 \cdot 10^{-8}$; средний размер частицы разрушения $w_{\xi} = 0,1$ мкм, $w_{\eta} = 0,2$ мкм (в расчетах принят равным неслучайной величине); среднее расстояние между выступами $\Delta s_{\xi} = 100$ мкм, $\Delta s_{\eta} = 30$ мкм; приложенная нагрузка $F_0 = 6500$ Н. Характеристики поршня: диаметр $d_{\text{п}} = 130$ мм, высота юбки $h_{\text{п}} = 90$ мм, ход поршня $l_{\text{п}} = 150$ мм. Длина взаимодействующих поверхностей $l_p = 20$ мм при многократном прохождении в одну сторону.

Исходные распределения $p_0(x)$, $q_0(x)$ для поверхностей ξ и η получены из реальных профилограмм (рис. 4) аппроксимацией бета-распределением, по-

скольку высоты сосредоточены на конечном отрезке; использованы смещенные, растянутые и дискретизированные бета-распределения. Получены следующие значения параметров исходных распределений: $a_{\xi} = 4,2$; $b_{\xi} = 1,8$; $a_{\eta} = 2,2$, $b_{\eta} = 2,8$, предварительно подвергнутых короткому процессу приработки [11, 12].

Результаты расчетов

Дискретность по (21) по пути трения $\Delta L = 7000$ м соответствует 700 000 оборотам коленчатого вала двигателя. Износ вычисляется как разность уровней высот вершин после пути трения L : $I(L) = \eta_{\max}(L) - \eta_{\min}(L)$, где

$\eta_{\max}(L) = \min\{x:q(x, L) \neq 0\}$ — уровень максимальных высот поверхности η .

Характеристики трения приведены в зависимости от пути трения. На рис. 5 показана эволюция распределений при увеличении пути трения L . Плотности распределений при $L \neq 0$ изображены сплошными линиями, а исходные $L = 0$ — пунктирными; слева показаны плотности p_{ξ} для цилиндра, справа q_{η} — для поршня. Горизонтальная шкала высот жестко связана с поршнем, поэтому сближение поверхностей отображается сдвигом вправо распределения p_{ξ} . Шкала высот дана в

микрометрах. Из рис. 5, *a* следует, что при $L = 350$ км левая часть распределения q_{η} начинает меняться, а правая часть распределения p_{ξ} — нет (поршень выполнен из алюминиевого сплава, а цилиндр из чугуна). На рис. 5, *б* эффект изменения q_{η} усиливается, на рис. 5, *в* начинает меняться распределение цилиндра, кроме того, заметен некоторый износ — сближение поверхностей (сдвиг распределения p_{ξ} на 2 мкм). На рис. 5, *г*, *д* распределения продолжают меняться, причем q_{η} для поршня стало узким (порядка 1 мкм). Из рис. 5, *е* следует, что при $L = 7000$ км уровень высот

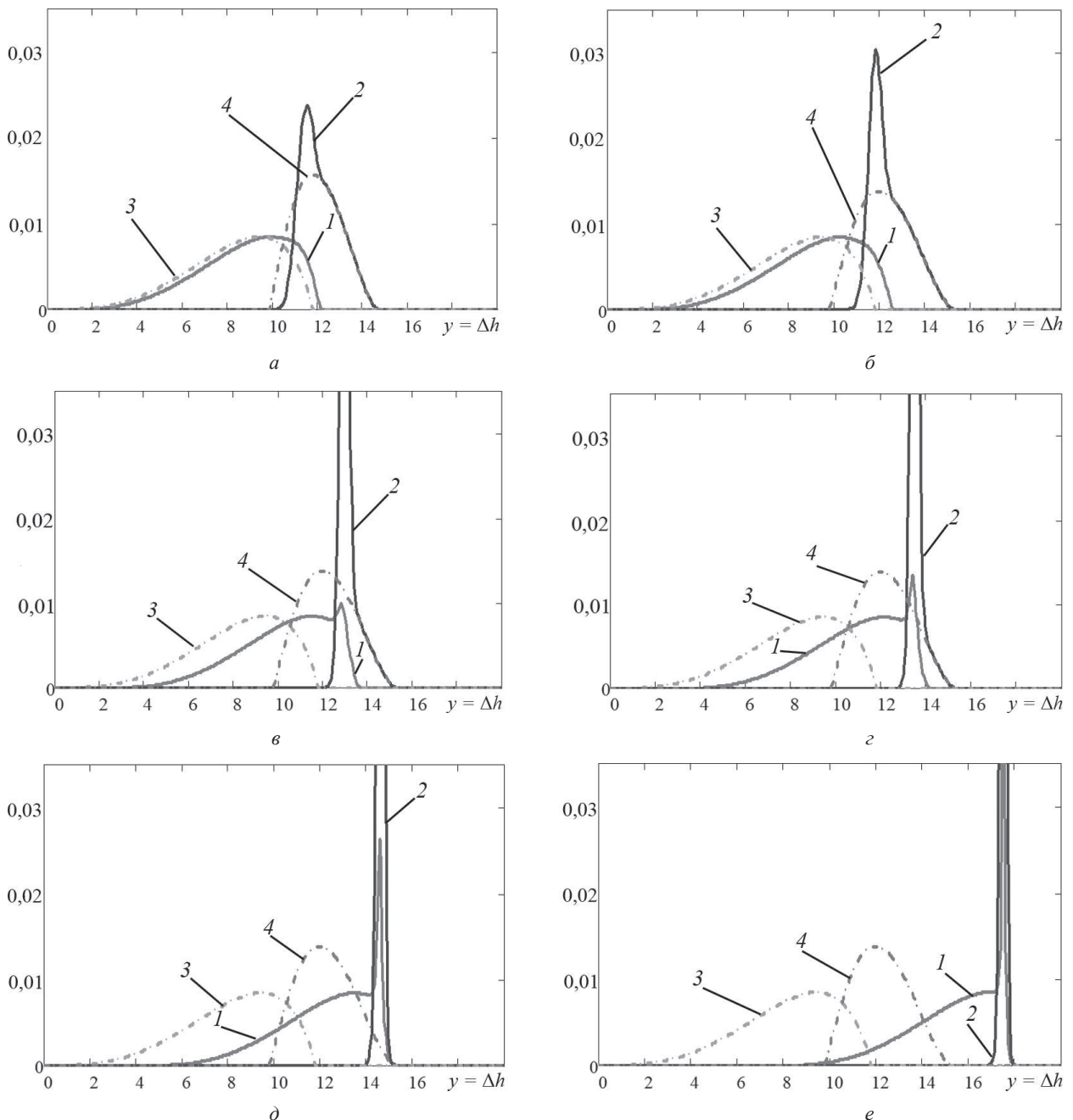
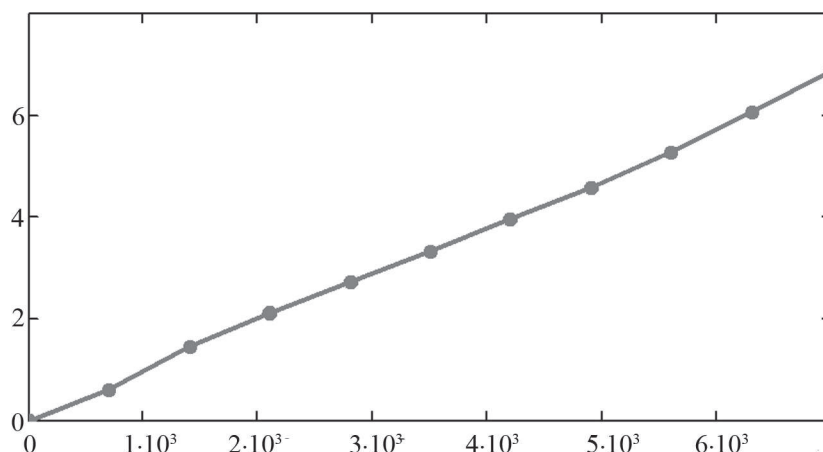


Рис. 5. Изменение распределений шероховатости, мкм, при увеличении пути трения L :

$L = 350$ (*a*), 700 (*б*), 2100 (*в*), 2800 (*г*), 4200 (*д*), 7000 (*е*) км; 1 — p_{ξ} ; 2 — q_{η} ; 3 — p_0 ; 4 — q_0 ; пунктирные линии — исходные распределения

Рис. 6. Зависимость износа поршня, мкм, от пути трения L , км

поверхности поршня изменился приблизительно на 7 мкм, это и есть величина износа к данному моменту.

На рис. 6 показан износ как функция пути трения. Он достигает критического значения 6,4 мкм на пути трения ≈ 6600 км (порядка 5500 моточасов).

Заключение

Дан общий подход к построению модели взаимодействия шероховатых поверхностей, приводящий к анализу марковского процесса. Приведено новое обоснование марковости. Подход применен к процессу трения, а именно к режиму усталостного разрушения. Обоснован выбор интервала дискретизации пересчета распределений, существенно ускоряющий численный анализ модели ценой изменения матрицы переходных вероятностей. Выписаны уравнения Колмогорова – Феллера для модели усталостного разрушения. Представлены экспериментальные результаты анализа процесса изнашивания поверхности поршня в дизеле ЧН 13/1, показывающие, что в начале рабочего хода имеет место граничное трение, приводящее к натиранию. Режим проанализирован на модели. Результаты показывают закономерности изменения поверхностей для цилиндра и поршня. Расчет позволил оценить величину износа этого сопряжения и спрогнозировать его ресурс.

Литература

1. Горицкий Ю.А. О марковском подходе к моделированию процесса трения // Математика. Компьютер. Образование: Тез. докл. конф. Дубна, 2008. С. 63.
2. Тигетов Д.Г., Горицкий Ю.А. Марковская модель механического взаимодействия шероховатых поверхностей в процессе трения // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2010. № 3. С. 3—12.
3. Горицкий Ю.А., Главатских С.Б., Бражникова Ю.С. Марковская модель взаимодействия шероховатых поверхностей // Трение и смазка в машинах и механизмах. 2014. № 2. С. 11—20.

4. Тигетов Д.Г. Разработка и исследование вероятностных моделей взаимодействия шероховатых поверхностей в процессе трения: дисс. ... канд. техн. наук. М.: Изд-во МЭИ, 2010.

5. Nayak P.R. Random Process Model of Rough Surfaces // J. Lubrication Tech. 1971. V. 93. Pp. 398—407.

6. Greenwood J.A., Williamson J.B.P. Contact of Nominally Flat Surfaces // Proc. Royal Soc. 1966. Ser. A. V. 295. Pp. 300—319.

7. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977.

8. Lazarev V., Gavrilov K., Doikin A., Vorlauffer G., Sequard-Base J. Estimation of the Tribotechnical Parameters of the Piston Skirt-cylinder Liner Contact Interface from an IC-engine for Decreasing the Mechanical Losses // WIT Trans. Ecology and Environment. 2014. V. 190. No. 1. Pp. 625—635.

9. Gavrilov K., Rozhdestvensky Y. Numerical and Experimental Investigations of Tribosystems of Piston Engines Taking into Account Boundary Lubrication Regime, Macro and Microgeometry of Contact Interface // Soc. of Tribologists and Lubrication Eng. Annual Meeting and Exhibition. 2014. No. 2. Pp. 583—585.

10. Goritskiy Yu.A. e. a. Numerical Model for Mechanical Interaction of Rough Surfaces of the Piston-cylinder Liner Tribosystem // FME Trans. 2015. V. 43. No. 3. Pp. 249—253.

11. Горицкий Ю.А., Тигетов Д.Г. Марковский процесс с непрерывным временем для описания механического взаимодействия шероховатых поверхностей // Вестник МЭИ. 2011. № 6. С. 112—125.

12. Горицкий Ю.А., Бражникова Ю.С. Уравнения и их решение для марковской модели упругопластического взаимодействия шероховатых поверхностей // Вестник МЭИ. 2013. № 6. С. 154—165.

References

1. Goritskiy Yu.A. O Markovskom Podhode k Modelirovaniyu Protsessa Treniya. Matematika.

Komp'yuter. Obrazovanie: Tez. dokl. konf. Dubna, 2008:63. (in Russian).

2. **Tigetov D.G., Goritskiy Yu.A.** Markovskaya Model' Mekhanicheskogo Vzaimodeystviya Sherohovatyh Poverhnostey v Protsesse Treniya. Trenie i Smazka v Mashinah i Mekhanizmah. 2010;3:3—12. (in Russian).

3. **Goritskiy Yu.A., Glavatskih S.B., Brazhnikova Yu.S.** Markovskaya Model' Vzaimodeystviya Sherohovatyh Poverhnostey. Trenie i Smazka v Mashinah i Mekhanizmah. 2014;2:11—20. (in Russian).

4. **Tigetov D.G.** Razrabotka i Issledovanie Veroyatnostnyh Modeley Vzaimodeystviya Sherohovatyh Poverhnostey v Protsesse Treniya: Diss. ... Kand. Tekhn. Nauk. M.: Izd-vo. MPEI, 2010. (in Russian).

5. **Nayak P.R.** Random Process Model of Rough Surfaces. J. Lubrication Tech. 1971;93:398—407.

6. **Greenwood J.A., Williamson J.B.P.** Contact of Nominally Flat Surfaces. Proc. Royal Soc. 1966; A;295:300—319.

7. **Kragel'skiy I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S.** Osnovy Raschetov na Trenie i Iznos. M.: Mashinostroenie, 1977. (in Russian).

8. **Lazarev V., Gavrilov K., Doikin A., Vorlaufer G., Sequard-Base J.** Estimation of the Tribotechnical Parameters of the Piston Skirt-cylinder Liner Contact Interface from an IC-engine for Decreasing the Mechanical Losses. WIT Trans. Ecology and Environment. 2014;190;1:625—635.

9. **Gavrilov K., Rozhdestvenskiy Y.** Numerical and Experimental Investigations of Tribosystems of Piston Engines Taking into Account Boundary Lubrication Regime, Macro and Microgeometry of Contact Interface. Soc. of Tribologists and Lubrication Eng. Annual Meeting and Exhibition. 2014;2:583—585.

10. **Goritskiy Yu.A. e. a.** Numerical Model for Mechanical Interaction of Rough Surfaces of the Piston-cylinder Liner Tribosystem. FME Trans. 2015;43;3: 249—253.

11. **Goritskiy Yu.A., Tigetov D.G.** Markovskiy Protsess s Nepreryvnym Vremenem dlya Opisaniya Mekhanicheskogo Vzaimodeystviya Sherohovatyh Poverhnostey. Vestnik MPEI. 2011;6:112—125. (in Russian).

12. **Goritskiy Yu.A., Brazhnikova Yu.S.** Uravneniya i ih Reshenie dlya Markovskoy Modeli Uprugoplasticheskogo Vzaimodeystviya Sherohovatyh Poverhnostey. Vestnik MPEI. 2013;6:154—165. (in Russian).

Сведения об авторах

Горицкий Юрий Александрович — доктор технических наук, профессор кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: goritskiy@yandex.ru

Гаврилов Константин Владимирович — кандидат технических наук, доцент кафедры автомобильного транспорта Южно-Уральского государственного университета

Исмаилова Юлия Сергеевна — аспирант кафедры прикладной математики НИУ «МЭИ»

Шевченко Ольга Васильевна — старший преподаватель кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ»

Information about authors

Goritskiy Yuriy A. — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: goritskiy@yandex.ru

Gavrilov Konstantin V. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Road Transport Dept., South Ural State University

Ismailova Yulia S. — Ph.D.-student of Applied Mathematics Dept., NRU MPEI

Shevchenko Olga V. — Senior Lecturer of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI

Статья поступила в редакцию 15.03.2017