УДК 519.716
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-143-149

Об аналоге теоремы Слупецкого для полиномиальных функций

Н.Ф. Алексиадис

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики. Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем, с одной стороны, определяет серию существенных требований, которые накладываются на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.
Проблематика теории функциональных систем обширна. К числу основных относятся проблемы о полноте и относительной полноте, о выразимости, синтезе и анализе и другие.
В настоящей статье рассмотрены функциональные системы полиномиальных функций:
• с натуральными коэффициентами, где значения как аргументов, так и самих функций, принадлежат множеству натуральных чисел;
• с целыми коэффициентами, где значения как аргументов, так и самих функций, принадлежат множеству целых чисел;
• с рациональными коэффициентами, где значения как аргументов, так и самих функций, принадлежат множеству рациональных чисел.
В качестве множества операций во всех функциональных системах взяты операции суперпозиции (перестановка переменных, переименование переменных без отождествления, отождествление переменных, введение фиктивной переменной, удаление фиктивной переменной и подстановка одной функции в другую), и для этих систем исследована проблема относительной полноты.
Представлен алгоритмический подход данной проблемы (аналог теоремы Слупецкого) для указанных функциональных систем. В частности, доказано, что поставленная задача имеет положительный ответ только для функциональной системы с натуральными коэффициентами, а для двух других ответ отрицательный.

Ключевые слова: полином, функциональная система, проблема полноты, десятая проблема Гильберта, алгоритмически неразрешимая проблема.

Для цитирования: Алексиадис Н.Ф. Об аналоге теоремы Слупецкого для полиномиальных функций // Вестник МЭИ. 2017. № 5. С. 143—149. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-143-149.

An Analog of Slupecki’s Theorem for Polynomials

N.Ph. Aleksiadis

Functional systems are among the main objects in discrete mathematics and mathematical cybernetics. The meaningful connection of functional systems with real cybernetic models of control systems, on the one hand, determines a series of essential requirements that are imposed on functional systems, and on the other hand, generates a class of important problems that have both theoretical and application significance.
The theory of functional systems covers a wide range of problem areas, the main of them being the problems of completeness, relative completeness, expressibility, synthesis, analysis, and some others.
The article considers the functional systems of polynomial functions falling in the following categories: (i) with natural coefficients in which the values of both the arguments and the functions themselves belong to the set of natural numbers; (ii) with integer coefficients in which the values of both the arguments and the functions themselves belong to the set of integer numbers; and (iii) with rational coefficients in which the values of both the arguments and the functions themselves belong to the set of rational numbers.
The superposition operations (permutation of variables, renaming of variables without identifying them, identifying the variables, introducing a fictitious variable, removing a fictitious variable, and substituting one function into another) were taken as a set of operations in all these functional systems, and the problem of relative completeness is investigated for these systems.
An algorithmic approach of this problem (an analog of Slupecki's theorem) is presented for the above-mentioned functional systems. In particular, it has been proven that the posed problem has a positive answer only for a functional system with natural coefficients, whereas the answer for the other two systems is negative.

Key words: polynomial, functional system, completeness problem, 10th Hilbert problem, algorithmically unsolvable problem.

For citation: Aleksiadis N.Ph. An Analog of Slupecki’s Theorem for Polynomials. MPEI Vestnik. 2017;5: 143—149. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-143-149.

Настоящая работа является продолжением и дополнением научных статей [1—5], в которых исследована проблема полноты для функциональных систем полиномиальных функций. Предложены результаты изучения алгоритмического подхода относительной полноты для этих функциональных систем. К тому же они являются аналогами известной теоремы Слупецкого для k-значной логики $(k \geq 3)$.

Функциональная система представляет собой множество функций с некоторым набором операций, применяемых к этим функциям и приводящих к получению других функций из этого же множества, т. е. функциональная система — это пара вида $\mathbf{F} = (F, O)$, где F, O — множества функций и операций, при этом каждая операция из O замкнута относительно множества F.

Функциональные системы являются одним из основных объектов дискретной математики и математической кибернетики. Содержательная связь функциональных систем с реальными кибернетическими моделями управляющих систем, с одной стороны, определяет серию существенных требований, накладываемых на функциональные системы, а с другой стороны, порождает класс важных задач, имеющих как теоретическое, так и прикладное значение.

Проблематика теории функциональных систем обширна. К числу основных относятся проблемы о полноте, об относительной полноте, выразимости, синтезе и анализе и др.

В настоящей работе рассмотрены функциональные системы полиномиальных функций:

- с натуральными коэффициентами, т. е. пара $\mathbf{F}_N = (P_N, O)$, где P_N — множество всех полиномиальных функций, задаваемых полиномами с натуральными коэффициентами, аргументы которых и сами функции принимают значения из N;
- с целыми коэффициентами, т. е. пара $\mathbf{F}_Z = (P_Z, O)$, где P_Z — множество всех полиномиальных функций, задаваемых полиномами с целыми коэффициентами, аргументы которых и сами функции принимают значения из Z;
- с рациональными коэффициентами, т. е. пара $\mathbf{F}_Q = (P_Q, O)$, где P_Q — множество всех полиномиальных функций, задаваемых полиномами с рациональными коэффициентами, аргументы которых и сами функции принимают значения из Q.

В качестве множества операций O во всех функциональных системах возьмем операции суперпозиции (перестановку переменных, переименование переменных без отождествления, отождествление переменных, введение фиктивной переменной, удаление фиктивной переменной и подстановку одной функции в другую). Для всех систем исследована проблема относительной полноты.

Функциональная система полиномиальных функций с действительными коэффициентами, т. е. пара $\mathbf{F}_R = (P_R, O)$, где P_R — множество всех полиномиальных функций, задаваемых полиномами с действительными коэффициентами, аргументы которых и сами функции принимают значения из R, не рассматривалась по той причине, что $\mathbf{F}_N$, $\mathbf{F}_Z$, $\mathbf{F}_Q$ являются счетно-значными функциональными системами, а $\mathbf{F}_R$ выходит за эти рамки.

В качестве основной использована терминология [6, 7]: N, Z, Q, R — множества всех натуральных (включая число 0), целых, рациональных и действительных чисел; $\equiv$ — обозначим по определению; ■ — конец доказательства.

Полагаем, что $0^0 = 1$.

Вместо термина «функция, задаваемая полиномом с натуральными коэффициентами» введем термин «полином с натуральными коэффициентами» или просто «нп-полином» или «нп-функция», т. е. отождествим формулу (полином) и (полиномиальную) функцию, задаваемую этой формулой.

Термин «функция, задаваемая полиномом с целыми коэффициентами» заменим термином «полином с целыми коэффициентами» или просто «цп-полином» или «цп-функция».

Вместо термина «функция, задаваемая полиномом с рациональными коэффициентами» возьмем термин «полином с рациональными коэффициентами» или просто «рп-полином» или «рп-функция»;

Рассмотрим произвольное множество G, содержащее не менее двух элементов. Обозначим через F_G множество функций, аргументы которых принимают значения из G, и такие, что значения этих функций также принадлежат G, при этом операции из O замкнуты относительно G (O — множество операции суперпозиции).

Мы вправе рассмотреть пару $\mathbf{F}_G = (F_G, O)$, которая является функциональной системой.

Допустим, функция $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ из F существенно зависит от переменной x_i $(1 \leq i \leq n)$, если существуют такие два набора

$$\left(c_1,\ldots,c_{i-1},a,c_{i+1},\ldots,c_n\right);\ \left(c_1,\ldots,c_{i-1},b,c_{i+1},\ldots,c_n\right)$$

значений переменных $x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n$ из G, что

$$f\left(c_1,\ldots,c_{i-1},a,c_{i+1},\ldots,c_n\right) \neq f\left(c_1,\ldots,c_{i-1},b,c_{i+1},\ldots,c_n\right)$$

при условии, что $a \neq b$.

В этом случае x_i называется существенной переменной функции $f(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n)$.

Переменная, не являющаяся существенной, называется фиктивной.

Две функции f_1, f_2 называются равными, если функцию f_2 можно получить из функции f_1 путем добавления и/или изъятия фиктивных переменных.

З а м е ч а н и е 1. Пусть вместе с функцией f заданы и все равные ей функции, т. е. функции рассматриваем с точностью до фиктивных переменных.

З а м е ч а н и е 2. Множества P_N, P_Z, P_Q содержат все функции от нулевого числа переменных, т. е. функции, являющиеся просто элементами (константами) соответственно множествам N, Z, Q.

Для произвольного подмножества $M \subseteq F_G$ обозначим через $[M]$ множество всех функций из F_G, которые получаются из функций множества M с помощью применения конечного числа операций суперпозиции и назовем $[M]$ замыканием множества M.

Множество $M \subseteq F_G$ называется (функционально) замкнутым, если $[M] = M$. Замкнутое множество принято называть замкнутым классом.

Множество $M \subseteq F_G$ называется (функционально) полным, если $[M] = F_G$. Полное множество принято называть полной системой.

Проблема полноты для функциональной системы $\mathbf{F}_G$ состоит в описании всех подмножеств множества F_G, которые являются полными в функциональной системе $\mathbf{F}_G$.

Алгоритмический вариант проблемы полноты состоит в установлении существования алгоритма, распознающего, образует ли произвольная конечная система функций из F_G вместе с предварительно заданным множеством функций (также из F_G) полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_G$.

Если проблема полноты алгоритмически неразрешима, т. е. для конечной произвольной системы функций нельзя ответить на вопрос, полна она или нет, то на полноту исследуем такие системы функций, о которых заранее известны некоторые свойства (как говорят в таком случае, на исследуемые системы функций накладываем ограничения). В таких случаях вместо термина «проблема полноты» употребляется термин «проблема относительной полноты».

Проблема относительной полноты для функциональной системы $\mathbf{F}_G$ состоит в описании всех подмножеств множества F_G, которые содержат заранее известное множество и являются полными в функциональной системе $\mathbf{F}_G$.

Алгоритмический вариант проблемы относительной полноты состоит в установлении того, существует ли алгоритм, распознающий, образует ли произвольная конечная система функций из F_G вместе с заданным множеством функций (также из F_G) полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_G$.

З а м е ч а н и е 3. Проблему относительной полноты полезно изучать и в том случае, когда проблема полноты алгоритмически разрешима, поскольку алгоритм проверки относительной полноты часто оказывается более простым, чем алгоритм проверки полноты произвольной конечной системы.

Основной целью является исследование проблемы относительной полноты для функциональных систем полиномов $\mathbf{P}_N$, $\mathbf{P}_Z$, $\mathbf{P}_Q$.

Для функциональной системы $\mathbf{F}_N$ в [2] изучена проблема относительной полноты и получены следующие результаты.

Нп-функцию $f(x_1, ..., x_n)$ назовем нп-аддитивной, если для некоторых i и j $(1 \le i < j \le n)$ найдутся числа

$$c_1,\ldots,c_{i-1},\ c_{i+1},\ldots,c_{j-1},\ c_{j+1},\ldots,c_n$$

из нулей и единиц, такие, что

$$f\left(c_1,\ldots,c_{i-1},x_i,c_{i+1},\ldots,c_{j-1},x_j,c_{j+1},\ldots,c_n\right) = x_i + x_j.$$

Нп-функцию $f(x_1, ..., x_n)$ назовем нп-мультипликативной, если для некоторых i и j $(1 \le i < j \le n)$ найдутся числа

$$c_1,\ldots,c_{i-1},\ c_{i+1},\ldots,c_{j-1},\ c_{j+1},\ldots,c_n$$

из нулей и единиц, такие, что

$$f\left(c_1,\ldots,c_{i-1},\ x_i,\ c_{i+1},\ldots,c_{j-1},\ x_j,\ c_{j+1},\ldots,c_n\right) = x_i x_j.$$

Теорема 1. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_N$ *система нп-функций, содержащая все нп-мономы, полна тогда и только тогда, когда она содержит нп-аддитивную функцию* [2].

Теорема 2. *Существует алгоритм, распознающий, образует ли произвольная конечная система нп-функций вместе с множеством всех нп-мономов полную систему в функциональной системе* $\mathbf{F}_N$ [2].

Теорема 3. *В функциональной системе* $\mathbf{F}_N$ *система нп-функций, содержащая все нп-функции одной переменной, полна тогда и только тогда, когда она содержит нп-аддитивную и нп-мультипликативную функции* [2].

Теорема 4. *Существует алгоритм, распознающий, образует ли произвольная конечная система нп-функций вместе с множеством всех нп-функций одной переменной полную систему в функциональной системе* $\mathbf{F}_N$ [2].

Рассмотрим функциональную систему $\mathbf{F}_Z$.

Лемма 1. *Пусть* $f(x_1, ..., x_n)$ *— произвольная цп-функция, отличная от константы. Тогда система цп-функций, состоящая из функции* $[f^2(t_1, ..., t_n) + 1](x - y)$ *и всех цп-мономов, является полной в функциональной системе* $\mathbf{F}_Z$ *тогда и только тогда, когда* $f(t_1, ..., t_n)$ *имеет корень в* Z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через M данную систему цп-функций.

Пусть M — полная система, а $f(t_1, ..., t_n)$ не имеет корней в Z. Тогда $[f^2(t_1, ..., t_n) + 1] \ge 2$ для любых значений переменных $t_1, ..., t_n$ из Z. Следовательно, функция $[f^2(t_1, ..., t_n) + 1](x - y)$ не принимает все значения из Z (в частности, значение 1).

Построим по индукции последовательность множеств $H_1, H_2, H_3, ...$ функций и F_Z.

Базис индукции. Положим $H_1 = M$.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $H_1, H_2, H_3, ..., H_i$; тогда H_{i+1} определим как множество всевозможных суперпозиций вида $g(h_1, ... , h_m)$, где g — функция из M; $h_1, ... , h_m$ — либо переменные, либо функции из H_i.

Ясно, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = [M]$.

С помощью математической индукции по i докажем, что множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ не содержит линейной функции вида $\pm x \pm y + c$, где c — произвольная константа из Z.

Базис индукции. Очевидно, что H_1 не содержит функции вида $\pm x \pm y + c$.

Индуктивный переход. Пусть H_i не содержит функции вида $\pm x \pm y + c$, тогда покажем, что и множество H_{i+1} не содержит функции вида $\pm x \pm y + c$.

Рассмотрим произвольную суперпозицию $h = g(h_1, \ldots, h_m)$ из H_{i+1}, где g — функция из M; $h_1, \ldots, h_m$ — либо переменные, либо функции из H_i.

Возможны два случая.

1. $g = [f^2(t_1, ..., t_n) + 1](x - y)$, тогда ясно, что $m = n + 2$ и $h = g(h_1, \ldots, h_m) = [f^2(h_1, \ldots, h_n) + 1](h_{n+1}, \ldots, h_{n+2})$.

Эта суперпозиция не принимает значение 1, следовательно, она отличается от функции вида $\pm x \pm y + c$.

2. g — моном, т. е. $g = dz_1^{k_1} \cdots z_s^{k_s}$, где d — целое число; $k_1, ..., k_s$ — неотрицательные целые числа, тогда ясно, что $m = s$ и $h = g(h_1, \ldots, h_m) = dz_1^{k_1} \cdots z_s^{k_s}$.

Следует заметить, что если эта суперпозиция является функцией вида $\pm x \pm y + c$, то

i) $d = -1$ или $d = 1$;

ii) существует такое число i ($1 \le i \le m$), такой набор целых чисел $c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_m$ и такое целое число a, что

$$g(c_1, ..., c_{i-1}, z_i, c_{i+1}, ..., c_m) = \pm z_i + a,$$

а h_i является функцией вида $\pm x \pm y + c$, но так как h_i является либо переменной, либо функцией из H_i, то она отлична от функции вида $\pm x \pm y + c$, т. е. h не является функцией вида $\pm x \pm y + c$.

Следовательно, H_{i+1} не содержит функции вида $\pm x \pm y + c$.

Итак, функция вида $\pm x \pm y + c$ не содержится в множестве $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = [M]$, поэтому $[M] \ne F_Z$, значит, если M — полная система, то $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Z.

Теперь докажем обратное. Пусть $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Z, т. е. существует такой набор $c_1, ..., c_n$ чисел из Z, что $f(c_1, ..., c_n) = 0$, так как $c_1, ..., c_n \in M$, то $[f^2(c_1, ..., c_n) + 1](x - y) = x - y \in [M]$. Следовательно, $[M]$ содержит подсистему $\{x - y, xy, 1\}$, которая является полной в $\mathbf{F}_Z$ [3], поэтому M — полная система ■.

Теорема 5. *Не существует алгоритма, распознающего, образует ли произвольная конечная система цп-функций вместе с множеством всех цп-мономов полную систему в функциональной системе* $\mathbf{F}_Z$.

Доказательство. Допустим противное: пусть существует алгоритм A, распознающий, образует ли произвольная конечная система цп-функций вместе с множеством всех цп-мономов полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_Z$. Тогда, в частности, алгоритм A распознает, образует ли конечная система $\{[f^2(t_1, ..., t_n) + 1](x - y)\}$ вместе с множеством всех цп-мономов полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_Z$, где $f(t_1, ..., t_n)$ — произвольный цп-полином из F_Z, отличный от константы. Но тогда, в силу леммы 1, существует алгоритм, распознающий, имеет ли произвольный цп-полином $f(t_1, ..., t_n)$ корень в Z, т. е. существует алгоритм для решения произвольного диофантова уравнения. Другими словами, десятая проблема Гильберта алгоритмически разрешима, но это противоречит широко известной теореме Матиясевича об алгоритмической неразрешимости десятой проблемы Гильберта. Значит, наше допущение неверно ■.

Лемма 2. *Пусть $f(x_1, ..., x_n)$ — произвольная цп-функция, отличная от константы. Тогда система цп-функций, состоящая из цп-функций*

$$[f^2(t_1, ..., t_n) + 1](x - y),\ [f^2(t_1, ..., t_n) + 1](xy)$$

и всех цп-функций одной переменной, является полной в функциональной системе $\mathbf{F}_Z$ *тогда и только тогда, когда $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Z.*

Доказательство. Обозначим через M данную систему цп-функций. Пусть M — полная система, а $f(t_1, ..., t_n)$ не имеет корней в Z. Тогда $[f^2(t_1, ..., t_n) + 1] \ge 2$ для любых значениях переменных $t_1, ..., t_n$ из Z. Следовательно, функции $[f^2(t_1, ..., t_n) + 1](x - y)$ и $[f^2(t_1, ..., t_n) + 1](xy)$ не принимают все значения из Z (в частности, значение 1).

Построим по индукции последовательность множеств $H_1, H_2, H_3, \ldots$ функций и F_Z.

Базис индукции. Положим $H_1 = M$.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $H_1, H_2, H_3, ..., H_i$, тогда H_{i+1} определим как множество всевозможных суперпозиций вида $g(h_1, \ldots, h_m)$, где g — функция из M; $h_1, \ldots, h_m$ — либо переменные, либо функции из H_i.

Ясно, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = [M]$.

С помощью математической индукции по i докажем, что множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ не содержит линейной функции вида $\pm x \pm y + c$, где c — произвольная константа из Z.

Базис индукции. Очевидно, что H_1 не содержит функции вида $\pm x \pm y + c$.

Индуктивный переход. Пусть H_i не содержит функции вида $\pm x \pm y + c$, тогда покажем, что и множество H_{i+1} не содержит функции вида $\pm x \pm y + c$.

Рассмотрим произвольную суперпозицию $h = g(h_1, \ldots, h_m)$ из H_{i+1}, где g — функция из M; $h_1, \ldots, h_m$ — либо переменные, либо функции из H_i.

Возможны следующие случаи.

1. $g = [f^2(t_1, ..., t_n) + 1](x - y)$, тогда ясно, что $m = n + 2$ и $h = g(h_1, ... , h_m) = [f^2(h_1, ... , h_n) + 1](h_{n+1}, ... , h_{n+2})$.

Эта суперпозиция не принимает значение 1, следовательно, она отличается от функции вида $\pm x \pm y + c$.

2. $g = [f^2(t_1, ..., t_n) + 1](xy)$, тогда ясно, что $m = n + 2$ и $h = g(h_1, ... , h_m) = [f^2(h_1, ... , h_n) + 1](h_{n+1}, ... , h_{n+2})$.

Эта суперпозиция не принимает значение 1, следовательно, она отличается от функции вида $\pm x \pm y + c$.

3. g — одноместная цп-функция, т. е. имеет вид

$$h = g(z) = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + ... + c_1 z + c_0,$$

тогда ясно, что $m = 1$ и

$$h = g\left(h_1, \cdots, h_m\right) = g\left(h_1\right) = c_k h_1^k + c_{k-1} h_1^{k-1} + \cdots + c_1 h_1 + c_0.$$

Заметим, что если h является функцией вида $\pm x \pm y + c$, то:

i) $g(z)$ является функцией вида $\pm z + c_0$;

ii) h_1 является функцией вида $\pm x \pm y + c$.

Так как h_1 является либо переменной, либо функцией из H_i, то она отлична от функции вида $\pm x \pm y + c$, т. е. h не является функцией вида $\pm x \pm y + c$.

Следовательно, H_{i+1} не содержит функции вида $\pm x \pm y + c$.

Итак, функция вида $\pm x \pm y + c$ не содержится в множестве $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \left[M\right]$, поэтому $[M] \neq F_Z$, значит, если M — полная система, то $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Z.

Теперь докажем обратное. Пусть $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Z, т. е. существует такой набор $c_1, ..., c_n$ чисел из Z, что $f(c_1, ..., c_n) = 0$, так как $c_1, ..., c_n \in M$, то $[f^2(c_1, ..., c_n) + 1](x - y) = x - y \in [M]$. Следовательно, $[M]$ содержит подсистему $\{x - y, xy, 1\}$, которая является полной в $\mathbf{F}_Z$ [3], поэтому M — полная система ■.

Теорема 6. *Не существует алгоритма, распознающего, образует ли произвольная конечная система цп-функций вместе с множеством всех одноместных цп-функций полную систему в функциональной системе* $\mathbf{F}_Z$.

Доказательство. Допустим противное: пусть существует алгоритм A, распознающий, образует ли произвольная конечная система цп-функций вместе с множеством всех цп-функций полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_Z$. Тогда, в частности, алгоритм A распознает, образует ли конечная система $\{[f^2(t_1, ..., t_n) + 1](x - y)\ f^2(t_1, ..., t_n)(xy)\}$ вместе с множеством всех одноместных цп-функций полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_Z$, где $f(t_1, ..., t_n)$ — произвольный цп-полином из F_Z, отличный от константы. Но тогда, в силу леммы 2, существует алгоритм, распознающий, имеет ли произвольный цп-полином $f(t_1, ..., t_n)$ корень в Z, т. е. существует алгоритм для решения произвольного диофантова уравнения. Другими словами, десятая проблема Гильберта алгоритмически разрешима, но это противоречит широко известной теореме Матиясевича об алгоритмической неразрешимости десятой проблемы Гильберта. Значит, наше допущение неверно ■.

Теперь рассмотрим функциональную систему $\mathbf{F}_Q$.

Лемма 3. *Пусть* $f(x_1, ..., x_n)$ *— произвольная рп-функция, отличная от константы. Тогда система рп-функций, состоящая из функции* $f^2(t_1, ..., t_n)(x - y)^2 + (x - y)$ *и всех рп-мономов, является полной в функциональной системе* $\mathbf{F}_Q$ *тогда и только тогда, когда* $f(t_1, ..., t_n)$ *имеет корень в* Q.

Доказательство. Обозначим через M данную систему рп-функций.

Пусть M — полная система, а $f(t_1, ..., t_n)$ не имеет корней в Q. Построим по индукции последовательность множеств $H_1, H_2, H_3, ...$ функций и F_Q.

Базис индукции. Положим $H_1 = M$.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $H_1, H_2, H_3, ..., H_i$, тогда H_{i+1} определим как множество всевозможных суперпозиций вида $g(h_1, ... , h_m)$, где g — функция из M; $h_1, ... , h_m$ — либо переменные, либо функции из H_i.

Ясно, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \left[M\right]$.

С помощью математической индукции по i докажем, что множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ не содержит линейной функции вида $c_1 x + c_2 y + c_3$, где c_1, c_2, c_3 — произвольные константы из Q.

Базис индукции. Очевидно, что H_1 не содержит функции вида $c_1 x + c_2 y + c_3$.

Индуктивный переход. Пусть H_i не содержит функции вида $c_1 x + c_2 y + c_3$, тогда покажем, что и множество H_{i+1} не содержит функции вида $c_1 x + c_2 y + c_3$.

Рассмотрим произвольную суперпозицию $h = g(h_1, ... , h_m)$ из H_{i+1}, где g — функция из M; $h_1, ... , h_m$ — либо переменные, либо функции из H_i.

Возможны два случая.

1. $g = f^2(t_1, ..., t_n)(x - y)^2 + (x - y)$, тогда ясно, что $m = n + 2$ и $h = g(h_1, ... , h_m) = f^2(t_1, ..., t_n)(h_{n+1} - h_{n+2})^2 + (h_{n+1} - h_{n+2})$.

Заметим, что эта суперпозиция является функцией вида $c_1 x + c_2 y + c_3$ только тогда, когда $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корни в Q. Получили противоречие.

2. g — моном, т. е. $g = dz_1^{k_1} \cdots z_s^{k_s}$, где d — рациональное число, отличное от нуля (если $d = 0$, то все очевидно); $k_1, ..., k_s$ — неотрицательные целые числа, тогда ясно, что $m = s$ и $h = g(h_1, ... , h_m) = dh_1^{k_1} \cdots h_s^{k_s}$.

Следует заметить, что если эта суперпозиция является функцией вида $c_1 x + c_2 y + c_3$, то существует такое число i $(1 \leq i \leq m)$, такой набор рациональных чисел $c_1, ..., c_{i-1}, c_{i+1}, ..., c_m$ и такие рациональные числа a и b, что

$$g(c_1, ..., c_{i-1}, z_i, c_{i+1}, ..., c_m) = \pm az_i + b,$$

а h_i является функцией вида $c_1x + c_2y + c_3$, но так как h_i является либо переменной, либо функцией из H_i, то она отлична от функции вида $c_1x + c_2y + c_3$, т. е. h не является функцией вида $c_1x + c_2y + c_3$.

Следовательно, H_{i+1} не содержит функции вида $c_1x + c_2y + c_3$.

Итак, функция вида $c_1x+c_2y+c_3$ не содержится в множестве $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = [M]$, поэтому $[M] \neq F_Q$, значит, если M — полная система, то $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Q.

Теперь докажем обратное. Пусть $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Q, т. е. существует такой набор $c_1, ..., c_n$ чисел из Q, что $f(c_1, ..., c_n) = 0$, так как $c_1, ..., c_n \in M$, то $f^2(c_1, ..., c_n)(x - y)^2 + (x - y) = x - y \in [M]$. Следовательно, $[M]$ содержит подсистему $\{x - y, xy\} \cup Q$, которая является полной в $\mathbf{F}_Q$, поэтому M — полная система ■.

Теорема 7. *Не существует алгоритма, распознающего, образует ли произвольная конечная система рп-функций вместе с множеством всех рп-мономов полную систему в функциональной системе* $\mathbf{F}_Q$.

Доказательство. Допустим противное: пусть существует алгоритм A, распознающий, образует ли произвольная конечная система рп-функций вместе с множеством всех рп-мономов полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$. Тогда, в частности, алгоритм A распознает, образует ли конечная система $\{f^2(c_1, ..., c_n)(x - y)^2 + (x - y)\}$ вместе с множеством всех рп-мономов полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$, где $f(t_1, ..., t_n)$ — произвольный полином из F_Q, отличный от константы, тогда в силу леммы 3 существует алгоритм, распознающий, имеет ли произвольный рп-полином $f(t_1, ..., t_n)$ и, в частности, цп-полином корень в Q, т. е. существует алгоритм для решения произвольного диофантова уравнения. Другими словами, десятая проблема Гильберта алгоритмически разрешима, но это противоречит широко известной теореме Матиясевича об алгоритмической неразрешимости десятой проблемы Гильберта. Значит, наше допущение неверно ■.

Лемма 4. *Пусть* $f(x_1, ..., x_n)$ *— произвольная рп-функция, отличная от константы. Тогда система рп-функций, состоящая из функции* $f^2(t_1, ..., t_n)(x-y)^2 + (x-y)$, $f^2(t_1, ..., t_n)(xy)^2 + (xy)$ *и всех рп-функций одной переменной, является полной в функциональной системе* $\mathbf{F}_Q$ *тогда и только тогда, когда* $f(t_1, ..., t_n)$ *имеет корень в* Q.

Доказательство. Обозначим через M данную систему рп-функций.

Пусть M — полная система, а $f(t_1, ..., t_n)$ не имеет корней в Q. Построим по индукции последовательность множеств $H_1, H_2, H_3, ...$ функций и F_Q.

Базис индукции. Положим $H_1 = M$.

Индуктивный переход. Пусть уже построены множества $H_1, H_2, H_3, ..., H_i$, тогда H_{i+1} определим как множество всевозможных суперпозиций вида $g(h_1, ..., h_m)$, где g — функция из M; $h_1, ..., h_m$ — либо переменные, либо функции из H_i.

Ясно, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = [M]$.

С помощью математической индукции по i докажем, что множество $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ не содержит линейной функции вида $c_1x + c_2y + c_3$, где c_1, c_2, c_3 — произвольные константы из Q.

Базис индукции. Очевидно, что H_1 не содержит функции вида $c_1x + c_2y + c_3$.

Индуктивный переход. Пусть H_i не содержит функции вида $c_1x+c_2y+c_3$, тогда покажем, что и множество H_{i+1} не содержит функции вида $c_1x + c_2y + c_3$.

Рассмотрим произвольную суперпозицию $h = g(h_1, ..., h_m)$ из H_{i+1}, где g — функция из M; $h_1, ..., h_m$ — либо переменные, либо функции из H_i.

Возможны следующие случаи.

1. $g = f^2(t_1, ..., t_n)(x - y)^2 + (x - y)$, тогда ясно, что $m = n + 2$ и

$$h = g(h_1, ..., h_m) = h = g(h_1, ..., h_m) = \\ = f^2(t_1, ..., t_n)(h_{n+1} - h_{n+2})^2 + (h_{n+1} - h_{n+2}).$$

Заметим, что эта суперпозиция является функцией вида $c_1x + c_2y + c_3$ только тогда, когда $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корни в Q. Получили противоречие.

2. $g = f^2(t_1, ..., t_n)(xy)^2 + (xy)$, тогда ясно, что $m = n + 2$ и $h = g(h_1, ..., h_m) = [f^2(h_1, ..., h_n) + 1](h_{n+1} \cdot h_{n+2})$.

Эта суперпозиция является функцией вида $c_1x + c_2y + c_3$ только тогда, когда $f^2(h_1, ..., h_n) + 1$ — константа, а одна из функций h_{n+1}, h_{n+2} из H_{i+1} — линейная вида $c_1x + c_2y + c_3$, где $c_1, c_2, c_3 \in Q$. Тогда H_{i+1} содержит функцию вида $c_1x + c_2y + c_3$. Получили противоречие.

3. g — одноместная рп-функция, т. е. имеет вид

$$h = g(z) = c_kz^k + c_{k-1}z^{k-1} + ... + c_1z + c_0,$$

тогда ясно, что $m = 1$ и

$$h = g\left(h_1, \cdots, h_m\right) = g\left(h_1\right) = c_k h_1^k + c_{k-1} h_1^{k-1} + \cdots + c_1 h_1 + c_0,$$

где $c_k, c_{k-1}, ..., c_1, c_0 \in Q$.

Заметим, что если h является функцией вида $c_1x + c_2y + c_3$, то:

i) $g(z)$ является функцией вида $c_1z + c_0$;

ii) h_1 является функцией вида $c_1x + c_2y + c_3$.

Тогда H_{i+1} содержит функцию вида $c_1x + c_2y + c_3$. Получили противоречие.

Следовательно, H_{i+1} не содержит функции вида $c_1x + c_2y + c_3$.

Итак, функция вида $c_1x+c_2y+c_3$ не содержится в множестве $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = [M]$, поэтому $[M] \neq F_Q$, значит, если M — полная система, то $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Q.

Теперь докажем обратное. Пусть $f(t_1, ..., t_n)$ имеет корень в Q, т. е. существует такой набор $c_1, ..., c_n$ чисел из Q, что $f(c_1, ..., c_n) = 0$, так как $c_1, ..., c_n \in$ M, то $f^2(c_1, ..., c_n)(x-y)^2 + (x-y) = x-y \in [M]$, $f^2(c_1, ..., c_n)(xy)^2 + (xy) = xy \in [M]$. Следовательно, $[M]$ содержит подсистему $\{x-y, xy\} \cup Q$, которая является полной в $\mathbf{F}_Q$, поэтому M — полная система ■.

Теорема 8. *Не существует алгоритма, распознающего, образует ли произвольная конечная система рп-функций вместе с множеством всех одноместных рп-функций полную систему в функциональной системе* $\mathbf{F}_Q$.

Доказательство. Допустим противное; пусть существует алгоритм A, распознающий, образует ли произвольная конечная система рп-функций вместе с множеством всех одноместных рп-функций полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$, тогда, в частности, алгоритм A распознает, образует ли конечная система $\{f^2(t_1, ..., t_n)(x-y)^2 + (x-y), f^2(t_1, ..., t_n)(xy)^2 + (xy)\}$ вместе с множеством всех одноместных рп-функций полную систему в функциональной системе $\mathbf{F}_Q$, где $f(t_1, ..., t_n)$ — произвольный полином из F_Q, отличный от константы. Тогда в силу леммы 4 существует алгоритм, распознающий, имеет ли произвольный рп-полином (и, в частности, цп-полином) корень в Q, т. е. существует алгоритм для решения произвольного диофантова уравнения. Другими словами, десятая проблема Гильберта алгоритмически разрешима, но это противоречит широко известной теореме Матиясевича об алгоритмической неразрешимости десятой проблемы Гильберта. Значит, допущение неверно ■.

Литература

1. **Алексиадис Н.Ф.** Функциональная система полиномов с натуральными коэффициентами // Вестник МЭИ. 2013. № 6. С. 125—140.
2. **Алексиадис Н.Ф.** Об относительной полноте в функциональной системе полиномов с натуральными коэффициентами // Информационные средства и технологии: Труды XXII Междунар. науч.-техн. конф. М.: Изд. дом МЭИ, 2014. Т. 3. С. 95—100.
3. **Алексиадис Н.Ф.** Алгоритмическая неразрешимость проблемы полноты для полиномов с целыми коэффициентами // Вестник МЭИ. 2015. № 3. С. 110—117.
4. **Алексиадис Н.Ф.** Алгоритмическая неразрешимость задачи о нахождении базиса конечной полной системы полиномов с целыми коэффициентами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. Т. 20. Вып. 3. С. 19—23.
5. **Алексиадис Н.Ф., Тун Лин Наинг.** Предполнота некоторых классов полиномов с целыми коэффициентами, сохраняющих константы // Информационные средства и технологии: Труды XXI Междунар. науч.-техн. конф. М.: Изд. дом МЭИ, 2013. Т. 3. С. 89—95.
6. **Кудрявцев В.Б.** Функциональные системы. Изд-во МГУ, 1982.
7. **Яблонский С.В.** Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1988.

References

1. **Aleksiadis N.F.** Funktsional'naya Sistema Polinomov s Natural'nymi Koeffitsientami. Vestnik MPEI. 2013;6:125—140. (in Russian).
2. **Aleksiadis N.F.** Ob Otnositel'noy Polnote v Funktsional'noy Sisteme Polinomov s Natural'nymi Koeffitsientami. Informatsionnye Sredstva i Tekhnologii: Trudy XXII Mezhdunar. Nauch.-tekhn. Konf. M.: Izd. Dom MPEI, 2014;3:95—100. (in Russian).
3. **Aleksiadis N.F.** Algoritmicheskaya Nerazreshimost' Problemy Polnoty dlya Polinomov s Tselymi Koeffitsientami. Vestnik MPEI. 2015;3:110—117. (in Russian).
4. **Aleksiadis N.F.** Algoritmicheskaya Nerazreshimost' Zadachi o Nahozhdenii Bazisa Konechnoy Polnoy Sistemy Polinomov s Tselymi Koeffitsientami. Intellektual'nye Sistemy. Teoriya i Prilozheniya. 2016;20;3:19—23. (in Russian).
5. **Aleksiadis N.F., Tun Lin Naing.** Predpolnota Nekotoryh Klassov Polinomov s Tselymi Koeffitsientami, Sohranyayushchih Konstanty. Informatsionnye Sredstva i Tekhnologii: Trudy XXI Mezhdunar. Nauch.-tekhn. Konf. M.: Izd. Dom MPEI, 2013;3:89—95. (in Russian).
6. **Kudryavtsev V.B.** Funktsional'nye Sistemy. Izd-vo MGU, 1982. (in Russian).
7. **Yablonskiy S.V.** Vvedenie v Diskretnuyu Matematiku. M.: Nauka, 1988. (in Russian).

Сведения об авторе

Алексиадис Никос Филиппович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Information about author

Aleksiadis Nikos Ph. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: aleksiadis@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 03.03.2017