УДК 517.95
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-150-156

Задача инициализации для сингулярно возмущенного интегрального уравнения с диагональным вырождением ядра

А.А. Боболжанов, В.Ф. Сафонов

Рассмотрено сингулярно возмущенное интегральное уравнение с диагональным вырождением ядра первого порядка, содержащее под знаком интеграла не только неизвестную функцию, но и производную от нее. Так же, как и в случае отсутствия производной под знаком интеграла, ставится задача о построении регуляризованного (по Ломову) асимптотического решения этой задачи и исследовании предельного перехода в ней при стремлении малого параметра к нулю на всем промежутке времени, включая и зону пограничного слоя (задача инициализации). В отличие от рассмотренного ранее случая, где положительность диагонального ядра и независимость интегрального оператора от производной неизвестной функции приводили к построению регуляризованной асимптотики лишь с быстро осциллирующими функциями, задача с производной допускает решения, асимптотика которых может содержать как быстро осциллирующие, так и быстро убывающие компоненты. Заметим, что аналогичная задача была изучена ранее лишь для интегродифференциального уравнения. В этом случае исходными данными для класса инициализации являются не только неоднородность и ядро интегрального оператора, но и начальный вектор. Это значительно облегчает исследование задачи инициализации. В случае же сингулярно возмущенного интегрального уравнения это не так, поэтому класс инициализации здесь будет «беднее», чем в интегродифференциальном случае. В качестве объекта для изучения предельного перехода берется главный член асимптотики в его регуляризованной (по Ломову) форме. Именно такая форма наиболее близка к точному решению рассматриваемой задачи и поэтому изучение главного члена асимптотики в его регуляризованной форме позволяет устранить те составляющие в точном решении, которые мешают стремлению решения к предельному. Все выкладки проведены для скалярного уравнения, но они будут справедливы и в векторном случае.

Ключевые слова: сингулярное возмущение, интегральное уравнение, диагональное вырождение, инициализация.

Для цитирования: Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Задача инициализации для сингулярно возмущенного интегрального уравнения с диагональным вырождением ядра // Вестник МЭИ. 2017. № 5. С. 150—156. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-150-156.

The Initialization Problem for a Singularly Perturbed Integral Equation with the Diagonally Degenerated Kernel

A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov

The article considers a singularly perturbed integral equation with a diagonally degenerated first-order kernel containing not only the unknown function under the integral sign, but also its derivative. Just as in the case when there is no derivative under the integral sign, the problem is formulated as follows: construct a regularized (in the Lomov sense) asymptotic solution of this problem and investigate the limiting transition in it as the small parameter tends to zero over the entire interval of time, including the boundary-layer zone (the initialization problem). Unlike the previously considered case, in which the positivity of the diagonal kernel and the independence of the integral operator from the derivative of the unknown function led to constructing a regularized asymptotics with rapidly oscillating functions, the problem with a derivative admits solutions the asymptotic behavior of which may contain both rapidly oscillating and rapidly decreasing components. It should be noted that a similar problem was previously studied only for an integro-differential equation. Not only the inhomogeneity and the kernel of the integral operator, but also the initial vector serve in this case as initial data for the initialization class. As a result, the study of the initialization problem becomes significantly easier. However, this is not the case for a singularly perturbed integral equation; therefore, the initialization class will be "poorer" than it is for an integro-differential equation. The principal term of the asymptotics in its regularized (in the Lomov sense) form is used as the object for studying the limiting transition. It is exactly this form that is closest to the exact solution of the problem under consideration; therefore, the study of the principal term of the asymptotics in its regularized form makes it possible to eliminate the components in the exact solution that impede the solution in its tending to the limiting one. All manipulations are given for a scalar equation; nonetheless, they will also hold in a vector case.

Key words: singular perturbation, integral equation, diagonal degeneration, initialization.

For citation: Bobodzhanov A.A., Safonov V. F. The Initialization Problem for a Singularly Perturbed Integral Equation with the Diagonally Degenerated Kernel. MPEI Vestnik. 2017;5: 150—156. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-5-150-156.

Посвящается нашему учителю
Сергею Александровичу Ломову
в связи 95-летием со дня рождения

В работе [1] рассматривалась система интегральных уравнений

$$\mu y(t,\varepsilon)=\int\limits_0^t (t-x)K_0(t,x)\,y(x,\varepsilon)\,ds+h(t),\ \ t\in[0,T],\ (1)$$

которая дифференцированием по t приводилась к интегродифференциальной задаче

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{dy}{dt}=\\=\int\limits_0^t\left(K_0(t,x)\,y(x,\varepsilon)+(t-x)\left(\frac{\partial}{\partial t}K_0(t,x)\right)y(x,\varepsilon)\right)ds+\dot h(t);\\ y(0,\varepsilon)=\frac{h(0)}{\varepsilon^2};\ t\in[0,T];\quad \varepsilon=\sqrt{\mu}\end{gathered}\qquad(2)$$

с нулевым оператором дифференциальной части [2]. Построено асимптотическое решение задачи (1) в виде частичной суммы $y_{\varepsilon N}(t)=\sum\limits_{k=-2}^{N}\varepsilon^j z_j(t,\psi(t,\varepsilon))$ регуляризованного ряда [3], содержащего отрицательные степени малого параметра $\varepsilon=\sqrt{\mu}$. В настоящей работе проанализировано более общее интегральное уравнение

$$\begin{gathered}\varepsilon^2 y(t,\varepsilon)=\\=\int\limits_0^t (t-x)\big(K_0(t,x)\,y(x,\varepsilon)+\varepsilon K_1(t,x)\,y'(x,\varepsilon)\big)\,dx+h(t),\end{gathered}\qquad(3)$$

под знак интеграла которого входит не только неизвестная функция, но и производная от нее. Так же, как и в [1], поставлена задача о построении регуляризованного асимптотического решения и исследовании предельного перехода (при $\varepsilon\to+0$) на всем промежутке $[0, T]$, включая зону пограничного слоя (задача инициализации). В отличие от [1], где изучен случай $K_0(t, t)>0$, $K_1(t, t)\equiv 0$, приводящий к построению регуляризованной асимптотики с быстро осциллирующими функциями, задача (3) при $K_1(t, t)\neq 0$ допускает решения, асимптотика которых (при $\varepsilon\to+0$) может содержать как быстро осциллирующие, так и быстро убывающие компоненты. Заметим, что аналогичная задача изучена в [4] лишь для интегродифференциального уравнения. В этом случае исходными данными для класса инициализации являются не только неоднородность $h(t)$ и ядро интегрального оператора, но и начальный вектор $\mathbf{y}^0$. Это значительно облегчает исследование задачи инициализации. В случае же сингулярно возмущенного интегрального уравнения (3) это не так, поэтому класс инициализации здесь будет «беднее», чем в интегродифференциальном случае. Все выкладки приведены для скалярного уравнения (3), но они будут справедливы и в векторном случае. Отметим, что уравнение типа (3) при $K_1(t, t)\equiv 0$ в случае диагонального вырождения высокого порядка $(t-x)^r K_0(t, x)$, $r\geq 2$ описано в [5].

Регуляризация задачи (3). Разрешимость итерационных задач

Предполагая, что выполнены следующие условия:

1. $K_j(t,x)\in C^\infty(0\le x\le t\le T,R)$;
$h(t)\in C^\infty(0\le t\le T,R)$,

продифференцируем дважды по t уравнение (3). Получим задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\frac{d^2}{dt^2}y(t,\varepsilon)=\\=K_0(t,t)\,y(t,\varepsilon)+\varepsilon K_1(t,t)\frac{d}{dt}y(t,\varepsilon)+\\+\int\limits_0^t\left\{2\frac{\partial}{\partial t}K_0(t,x)y(x,\varepsilon)+2\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}K_1(t,x)\frac{d}{dx}y(x,\varepsilon)+\right.\\\left.+(t-x)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}K_0(t,x)\,y(x,\varepsilon)+\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}K_1(t,x)\frac{d}{dx}y(x,\varepsilon)\right)\right\}\times\\\times dx+\frac{d^2}{dt^2}h(t);\ \ y(0,\varepsilon)=\frac{h(0)}{\varepsilon^2};\quad \varepsilon y'(0,\varepsilon)=\frac{\dot h(0)}{\varepsilon}.\end{gathered}$$

Введя функции $y=y$, $\varepsilon\dfrac{dy}{dx}=z$, придем к интегродифференциальной системе для вектор-функции $w=\{y, z\}$:

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{dw}{dt}=A(t)\,w+\int\limits_0^t G(t,x)w(x,\varepsilon)\,dx+H(t);\\ w(0,\varepsilon)=w^0(\varepsilon)\equiv\begin{pmatrix}h(0)/\varepsilon^2\\ \dot h(0)/\varepsilon\end{pmatrix},\end{gathered}\qquad(4)$$

где

$$A(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ K_0(t,t) & K_1(t,t)\end{bmatrix};\ H(t)=\begin{bmatrix}0\\ \ddot h(t)\end{bmatrix};$$

$$G(t,x)=\left[\begin{matrix}0\\ 2\dfrac{\partial}{\partial t}K_0(t,x)+(t-x)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}K_0(t,x)\right)\times\end{matrix}\right.$$
$$\left.\begin{matrix}0\\ \times 2\dfrac{\partial}{\partial t}K_1(t,x)+(t-x)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}K_1(t,x)\right)\end{matrix}\right].$$

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2-K_1(t,t)\lambda-K_0(t,t)=0$$

матрицы $\mathbf{A}(t)$ имеет корни

$$\lambda_1=\frac12 K_1(t,t)-\frac12\sqrt{K_1(t,t)^2+4K_0(t,t)};$$
$$\lambda_2=\frac12 K_1(t,t)+\frac12\sqrt{K_1(t,t)^2+4K_0(t,t)}\,.$$

Предположим, что

2. $\lambda_1(t)\neq\lambda_2(t),\lambda_j(t)\neq 0\,(\forall t\in[0,T])$,

проведем регуляризацию задачи (4) по переменным

$$\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(s)\,ds\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j=1,\ 2. \qquad (5)$$

Для расширения

$$\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)\left(\tilde{w}\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon},\varepsilon\right)\equiv w(t,\varepsilon),\tau=(\tau_1,\tau_2),\ \psi=(\psi_1,\psi_1)\right)$$

решим следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}-\sum_{j=1}^{2}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{w}-$$
$$-\int_0^t G(t,x)\tilde{w}\left(x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\varepsilon\right)dx=H(t);\ \tilde{w}(0,0,\varepsilon)=w^0(\varepsilon).$$

Однако не была проведена регуляризация интегрального члена

$$J(x,\varepsilon)=\int_0^t G(t,x)\tilde{w}\left(x,\frac{\psi(x)}{\varepsilon}\varepsilon\right)dx.$$

Поступая так же, как и в работе [1], введем пространство U, асимптотически инвариантное относительно оператора J:

$$U=\left\{w\ :w(t,\tau)=\sum_{j=1}^{2}w_j(t)\mathrm{e}^{\tau_j}+\right.$$
$$\left.w_0(t),w_i(t)\in C^\infty\left([0,T],\mathbb{C}^2,i=0,1,2\right)\right\}.$$

Подставим элемент $w(t,\tau)$ пространства U в интегральный оператор J:

$$Jw=\sum_{j=1}^{2}\int_0^t G(t,x)w_j(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\lambda_j(\theta)d\theta}dx+\int_0^t G(t,x)w_0(x)dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$J_j(t,\varepsilon)=\int_0^t G(t,x)w_j(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\lambda_j(\theta)d\theta}dx=$$
$$=\int_0^t\frac{G(t,x)w_j(x)}{\lambda_j(x)}d\mathrm{e}^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\lambda_j(\theta)d\theta}=\frac{G(t,x)w_j(x)}{\lambda_j(x)}\Big|_{x=0}^{x=t}-$$
$$-\int_0^t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{G(t,x)w_j(x)}{\lambda_j(x)}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x\lambda_j(\theta)d\theta}dx.$$

Продолжив этот процесс, придем к разложению

$$J_j(t,\varepsilon)\equiv\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\varepsilon^{m+1}\left\{\left[I_j^m(G(t,x)w_j(x))\right]_{x=t}\times\right.$$
$$\left.\times\mathrm{e}^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta}-\left[I_j^m(G(t,x)w_j(x))\right]_{x=0}\right\},j=1,\ 2, \qquad (6)$$

где введены операторы

$$I_j^{(0)}=\frac{1}{\lambda_j(x)};\ I_j^m=\frac{1}{\lambda_j(x)}\frac{\partial}{\partial x}I_j^{m-1},\ m\geq 1,\ j=1,\ 2.$$

Нетрудно показать, что при $\operatorname{Re}\lambda_j(t)\leq 0\ (\forall t\in[0,T],\ j=1,2)$ стоящий степенной ряд по ε сходится асимптотически к $J_j(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon\to+0$ (равномерно по $t\in[0,T]$). Подставив (6) в Jw и группируя коэффициенты при одинаковых степенях ε, запишем

$$J\,w(t,\tau)=R_0\,w(t,\tau)+\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}R_{m+1}\,w(t,\tau), \qquad (7)$$

где $\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}$, а операторы $R_m:U\to U$ (операторы порядка по ε) таковы, что их образ $R_m w(t,\tau)$ является суммой всех коэффициентов при ε^m в $Jw(t,\tau)$. Явные выражения этих операторов таковы ($w(t,u)$ — элемент пространства U):

$$R_0\,w(t,\tau)=\int_0^t G(x,s)w_0(x)dx;$$
$$R_{m+1}\,w(t,\tau)=(-1)^m([I_1^m(G(t,x)w_1(x)]_{x=t}\times$$
$$\times\mathrm{e}^{\tau_1}-[I_1^m(G(t,x)w_1(x)]_{x=0})+(-1)^m\times$$
$$\times\left\{[I_2^m(G(t,x)w_2(x)]_{x=t}e^{\tau_2}-[I_2^m(G(t,x)w_2(x)]_{x=0}\right\},$$
$$m\geq 0;$$

где I_j^0, I_j^m — введенные операторы, $j=1,2;\ m\geq 0.$ Проведем расширение данного оператора на рядах вида

$$\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=-2}^{\infty}\varepsilon^k\,w_k(t,\tau) \qquad (8)$$

с коэффициентами $w_k(t,\tau)\in U,k\geq 0.$

Определение 1. Формальным расширением $\tilde{J}$ оператора J на рядах вида (8) называется оператор

$$\tilde{J}\,\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\nu=-1}^{\infty}\varepsilon^\nu\sum_{s=-2,\nu-s\geq 0}^{\nu}R_{\nu-s}\,w_s(t,\tau). \qquad (9)$$

Выпишем регуляризованную (по отношению к (4)) задачу

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\lambda_1(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1}+\lambda_2(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2}-A(t)\tilde{w}-\tilde{J}\,\tilde{w}=H(t);$$
$$\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)\,|_{t=0,\tau=0}\equiv\tilde{w}(0,0,\varepsilon)=w^0(\varepsilon). \qquad (10)$$

Подставив ряд (8) в (10) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи:

$$L_0\,w_{-2}(t,\tau)\equiv\lambda_1(t)\frac{\partial w_{-2}}{\partial\tau_1}+\lambda_2(t)\frac{\partial w_{-2}}{\partial\tau_2}-$$
$$-A(t)\,w_{-2}-R_0\,w_{-2}=0,\ w_{-2}(0,0)=\{h(0),0\}; \qquad (11_{-2})$$

$$L_0\,w_{-1}(t,\tau)=-\frac{\partial w_{-2}}{\partial t}+R_1\,w_{-2};\ w_{-1}(0,0)=\{0;\dot{h}(0)\}; \qquad (11_{-1})$$

$$L_0 w_0(t,\tau)=-\frac{\partial w_{-1}}{\partial t}+R_1 w_{-1}+R_2 w_{-2}+H(t),\ w_0(0,0)=0;\ (11_0)$$

$$L_0 w_k(t,\tau)=-\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t}-R_1 w_{k-1}+R_2 w_{k-2}+...+ +R_{k+1} w_{-1},\ w_k(0,0)=0,\ k\geq 1. \quad (11_k)$$

Каждая из итерационных систем (11_{-2}) — (11_k) имеет вид системы

$$L_0 w(t,\tau)\equiv\lambda_1(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_1}+\lambda_2(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_2}- -A(t)w-\int_0^t G(t,x)w_0(x)dx=P(t,\tau), \quad (12)$$

разрешимость которой устанавливается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть* $P(t,\tau)=P_1(t)e^{\tau_1}+P_2(t)e^{\tau_2}+P_0(t)\in U$ *и выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда для разрешимости системы* (12) *в пространстве U необходимо и достаточно, чтобы*

$$< P(t,\tau),\chi_j(t)e^{\tau_j} >\equiv 0, \forall t\in[0,T],\ j=1,\ 2. \quad (13)$$

Здесь через <·> обозначено скалярное (при каждом $t\in[0, T]$) произведение в пространстве U, а через $x_j(t)$ — собственные векторы матрицы $\mathbf{A}^*(t)$, соответствующие собственному значению $\overline{\lambda}_j(t)$, $j=1, 2$; при этом системы $\{\varphi_i(t)\}$ и $\{x_j(t)\}$ собственных векторов матрицы $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{A}^*(t)$ соответственно берутся биортонормированными, т. е. $(\varphi_i(t),\chi_j(t))\equiv\delta_{ij}$ — символ Кронекера ($i, j = 1, 2$).

При выполнении условий (13) система (12) имеет следующее решение в пространстве U:

$$w(t,u)=[\alpha_1(t)\varphi_1(t)+\frac{(P_1(t),\chi_2(t))}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}\varphi_2(t)]e^{\tau_1}+ +[\alpha_2(t)\varphi_2(t)+\frac{(P_2(t),\chi_1(t))}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}\varphi_1(t)]e^{\tau_2}+w_0(t), \quad (14)$$

где $w_0(t)=-A^{-1}(t)P_0(t)+\int_0^t R(t,x)(-A^{-1}(x)P_0(x))dx$, $R(t,x)$ — резольвента ядра $-A^{-1}(t)G(t,x)$; $\alpha_j(t)\in C^\infty([0,T],\ \mathbf{C}^1)$ — произвольные скалярные функции, $j = 1, 2$.

Для построения единственного решения системы (12) рассмотрим ее при дополнительных условиях

$$w(0,0)=w_*; \quad (15_1)$$

$$\left\langle -\frac{\partial w}{\partial t}+R_1 w+Q(t,\tau),\chi_j(t)e^{\tau_j}\right\rangle\equiv 0, j=1,2,\forall t\in[0,T], \quad (15_2)$$

где $Q(t,\tau)=Q_1(t)e^{\tau_1}+Q_2(t)e^{\tau_2}+Q_0(t)$ — известная вектор-функция класса U; $\mathbf{w}_*\in\mathbb{C}^2$ — известный постоянный вектор.

Вычислим сначала (15_2), обозначив

$$\frac{(P_1(t),\chi_2(t))}{\lambda_1(t)-\lambda_2(t)}\equiv p_{12}(t);\quad \frac{(P_2(t),\chi_1(t))}{\lambda_2(t)-\lambda_1(t)}\equiv p_{21}(t),$$

и, учитывая (14), будем иметь

$$-\frac{\partial w}{\partial t}+R_1 w+Q(t,\tau)=-[(\alpha_1(t)\varphi_1(t))^*+$$
$$+\dot{p}_{12}(t)\varphi_2(t)+p_{12}(t)\dot{\varphi}_2(t)]e^{\tau_1}-$$
$$-[(\alpha_2(t)\varphi_2(t))^*+\dot{p}_{21}(t)\varphi_1(t)+p_{21}(t)\dot{\varphi}_1(t)]e^{\tau_2}-$$
$$-\dot{w}_0(t)+\frac{G(t,t)}{\lambda_1(t)}\left(\alpha_1(t)\varphi_1(t)+p_{12}(t)\varphi_2(t)\right)e^{\tau_1}+$$
$$+\frac{G(t,t)}{\lambda_2(t)}\left(\alpha_2(t)\varphi_2(t)+p_{21}(t)\varphi_1(t)\right)e^{\tau_2}-$$
$$-\frac{G(t,0)}{\lambda_1(0)}\left(\alpha_1(0)\varphi_1(0)+p_{12}(0)\varphi_2(0)\right)-$$
$$-\frac{G(t,0)}{\lambda_2(0)}\left(\alpha_2(0)\varphi_2(0)+p_{21}(0)\varphi_2(0)\right)+$$
$$+Q_1(t)e^{\tau_1}+Q_2(t)e^{\tau_2}+Q_0(t)\equiv$$
$$\equiv(-\dot{\alpha}_1(t)\varphi_1(t)-\alpha_1(t)\dot{\varphi}_1(t)-$$
$$-\dot{p}_{12}(t)\varphi_2(t)-p_{12}(t)\dot{\varphi}_2(t)+$$
$$+\frac{G(t,t)}{\lambda_1(t)}\alpha_1(t)\varphi_1(t)+\frac{G(t,t)}{\lambda_1(t)}p_{12}(t)\varphi_2(t)+$$
$$+Q_1(t))e^{\tau_1}+(-\dot{\alpha}_2(t)\varphi_2(t)-\alpha_2(t)\dot{\varphi}_2(t)-$$
$$-\dot{p}_{21}(t)\varphi_1(t)-p_{21}(t)\dot{\varphi}_1(t)+\frac{G(t,t)}{\lambda_2(t)}\alpha_2(t)\varphi_2(t)+$$
$$+\frac{G(t,t)}{\lambda_2(t)}p_{21}(t)\varphi_1(t)+Q_2(t))e^{\tau_2}+[Q_0(t)-\frac{G(t,0)}{\lambda_1(0)}(\alpha_1(0)\varphi_1(0)+$$
$$+p_{12}(0)\varphi(0))-\frac{G(t,0)}{\lambda_2(0)}(\alpha_2(0)\varphi_2(0)+p_{21}(0)\varphi_2(0))].$$

Условия ортогональности (15_2) дают:

$$-\dot{\alpha}_1+(\frac{G(t,t)\varphi_1(t)}{\lambda_1(t)}-\dot{\varphi}_1(t),\chi_1(t))\alpha_1+ +(Q_1(t)-p_{12}(t)\dot{\varphi}_2(t),\chi_1(t))=0;$$
$$-\dot{\alpha}_2+(\frac{G(t,t)\varphi_2(t)}{\lambda_2(t)}-\dot{\varphi}_2(t),\chi_2(t))\alpha_2+ +(Q_2(t)-p_{21}(t)\dot{\varphi}_1(t),\chi_2(t))=0. \quad (16)$$

Подчиняя (14) начальному условию $w(0,0)=w^*$, получим начальные условия для функции $\alpha_j(t)$:

$$\alpha_1(0)=(w_*+A^{-1}(0)P_0(0),\chi_1(0))-p_{21}(0);$$
$$\alpha_2(0)=(w_*+A^{-1}(0)P_0(0),\chi_2(0))-p_{12}(0). \quad (17)$$

Задача (16), (17) имеет единственное решение $\alpha_1(t)$, $\alpha_2=\alpha_2(t)$ в классе $C^\infty([0,T],\ \mathbf{C}^2)$, а значит, решение (14) системы (12) при дополнительных условиях (15_1), (15_2) в классе U определяется однозначно.

Применив теорему 1 к системе задач (16), найдем однозначно их решения $w_k=w_k(t,\tau)$ в пространстве U. Образуем сужение $w_{\varepsilon N}(t)=\sum_{k=-1}^{N}\varepsilon^k w_k\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)$ N-й частичной суммы $S_N(t,\ \tau)$ ряда (8) при $\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}$. Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1, 2 и все* $\mathrm{Re}\lambda_j(t)\le 0\left(\forall t\in[0,T]\right)$. *Тогда система (4) однозначно разрешима в пространстве* $C^1([0,T],\mathbf{C}^2)$, *и для ее решения* $w(t,\varepsilon)$ *справедлива оценка*

$$\| w(t,\varepsilon)-w_{\varepsilon N}(t)\|_{C[0,T]}\le C_N\varepsilon^{N+1},\ N=-2,\ -1,\ 0,\ 1,..., \tag{18}$$

где $C_N>0$ *постоянная, независящая от* ε *при* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0>0$ *достаточно мало).*

Предельный переход в задаче (4). Решение задачи инициализации

Для изучения предельного перехода на всем отрезке $[0, T]$ надо вычислить решения задач (11_{-2}) — (11_0) в пространстве U. Учитывая (см. теорему 2) , что решение $w(t,\varepsilon)$ задачи (4) представляется в виде

$$\begin{gathered}w(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-2}w_{-2}\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)+\varepsilon^{-1}w_{-1}\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)+\\+w_0\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)+\varepsilon R_1(t,\varepsilon);\\\left\|R_1(t,\varepsilon)\right\|_{C(0,T)}\le\bar{R}\ \left(\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]\right),\end{gathered}\tag{19}$$

надо выбрать такие исходные данные $h(t)$, $K_1(t,x)$, $K_2(t,x)$ интегрального уравнения (3), чтобы

$$w_{-2}\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)\equiv 0;\ w_{-1}\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)\equiv 0.$$

Поскольку в (11_{-2}) правая часть $P(t,\tau)\equiv 0$, то ее решение (14) имеет вид

$$w_{-2}(t,\tau)=\alpha_1^{(-2)}(t)\varphi_1(t)e^{\tau_1}+\alpha_2^{(-2)}(t)\varphi_2(t)e^{\tau_2},$$

где функции $\alpha_j^{(-2)}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases}\dot\alpha_1^{(-2)}=\left(\dfrac{G(t,t)}{\lambda_1(t)}\varphi_1(t)-\dot\varphi_1(t),\chi_1(t)\right)\alpha_1^{(-2)}=\\=0,\ \alpha_1^{(-2)}(0)=(w_{-2}(0,0),\chi_1(0));\\\dot\alpha_2^{(-2)}=\left(\dfrac{G(t,t)}{\lambda_2(t)}\varphi_2(t)-\dot\varphi_2(t),\chi_2(t)\right)\alpha_2^{(-2)}=\\=0,\ \alpha_2^{(-2)}(0)=(w_{-2}(0,0),\chi_2(0)).\end{cases}\tag{20}$$

Нам понадобятся явные выражения систем собственных векторов $\{\varphi_j(t)\}$, $\{\chi_j(t)\}$. Нетрудно показать, что они имеют вид

$$\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}1\\\lambda_1(t)\end{pmatrix},\ \varphi_2(t)=\begin{pmatrix}1\\\lambda_2(t)\end{pmatrix};$$

$$\chi_1(t)=\begin{pmatrix}\overline{\lambda_2(t)(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))^{-1}}\\\overline{(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))^{-1}}\end{pmatrix};$$

$$\chi_2(t)=\begin{pmatrix}\overline{\lambda_1(t)(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))^{-1}}\\\overline{(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))^{-1}}\end{pmatrix}$$

(в данном случае черта означает сопряжение). Учитывая, что

$$G(t,t)=\begin{pmatrix}0&0\\k_0(t)&k_1(t)\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{pmatrix}0&0\\2\dfrac{\partial K_0(t,x)}{\partial t}\Big|_{x=t}&2\dfrac{\partial K_1(t,x)}{\partial t}\Big|_{x=t}\end{pmatrix};$$

$$\dot\varphi_j(t)=\begin{pmatrix}0\\\dot\lambda_j(t)\end{pmatrix};\quad w_{-2}(0,0)=\begin{pmatrix}h(0)\\0\end{pmatrix},\ j=1,\ 2,$$

перепишем уравнения (20) в виде

$$\begin{cases}\dot\alpha_1^{(-2)}=\dfrac{k_0(t)+\lambda_1(t)k_1(t)-\dot\lambda_1(t)\lambda_1(t)}{\lambda_1(t)(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))}\alpha_1^{(-2)};\\\alpha_1^{(-2)}(0)=\dfrac{h(0)\lambda_1(0)}{\lambda_2(0)-\lambda_1(0)};\\\dot\alpha_2^{(-2)}=\dfrac{k_0(t)+\lambda_2(t)k_1(t)-\dot\lambda_2(t)\lambda_2(t)}{\lambda_2(t)(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))}\alpha_2^{(-2)};\\\alpha_2^{(-2)}(0)=\dfrac{h(0)\lambda_2(0)}{\lambda_1(0)-\lambda_2(0)}.\end{cases}$$

Отсюда видно, что $w_{-2}\left(t,\dfrac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)\equiv 0\Leftrightarrow h(0)=0$. При этом задача (11_{-1}) будет иметь вид $L_0w_{-1}(t,\tau)=0$, $w_{-1}(0,0)=\{0;\dot h(0)\}$. Рассуждая аналогично, получим, что $w_{-1}(t,\tau)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\dot h(0)=0$. Итак, если $h(0)=\dot h(0)=0$, то из (19) следует, что

$$\left\|w(t,\varepsilon)-w_0\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)\right\|_{C[0,T]}\to 0\ (\varepsilon\to+0).\tag{21}$$

Однако здесь функция $w_0\left(t,\dfrac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)$ зависит от ε, поэтому не ясно, какой будет предельная функция $\bar{\bar{w}}(t)$ для $w=(t,\varepsilon)$. Можно решить этот вопрос, если найти выражение для $w_0\left(t,\dfrac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)$. При $h(0)=\dot h(0)=0$ задача (11_0) будет иметь вид $L_0w_0(t,\tau)=H(t)$, $w_0(0,0)=0$. По формуле (14) с учетом того, что $P_1(t)\equiv P_2(t)\equiv 0$ и

$$\begin{gathered}w_0^{(0)}(t)=-A^{-1}(t)H(t)+\\+\int_0^t R(t,x)\left(-A^{-1}(x)H(x)\right)dx,\end{gathered}\tag{22}$$

получим явное выражение для $w_0\left(t,\dfrac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)$:

$$\begin{gathered}w_0\left(t,\frac{\psi(t)}{\varepsilon}\right)=\alpha_1^{(0)}(t)\varphi_1(t)e^{\frac{\psi_1(t)}{\varepsilon}}+\\+\alpha_2^{(0)}(t)\varphi_2(t)e^{\frac{\psi_2(t)}{\varepsilon}}+w_0^{(0)}(t).\end{gathered}$$

При этом функции $\alpha_1^{(0)}(t)$, $\alpha_2^{(0)}(t)$ удовлетворяют уравнениям (см. (16))

$$-\dot{\alpha}_1^{(0)}+(\frac{G(t,t)\varphi_1(t)}{\lambda_1(t)}-\dot{\varphi}_1(t),\chi_1(t))\alpha_1^{(0)}=0;$$
$$\alpha_1^{(0)}(0)=(A^{-1}(0)H(0),\chi_1(0));$$
$$-\dot{\alpha}_2^{(0)}+(\frac{G(t,t)\varphi_2(t)}{\lambda_2(t)}-\dot{\varphi}_2(t),\chi_2(t))\alpha_2^{(0)}=0;$$
$$\alpha_2^{(0)}(0)=(A^{-1}(0)H(0),\chi_2(0)).$$

Обозначим компоненты вектора $x_j(t)$ через $x_{kj}(t)$, т. е. $\chi_j(t)=\{\chi_{1j}(t),\chi_{2j}(t)\},\ \ j=1,\ 2$, так как

$$\left(A^{-1}(t)H(t),\chi_j(t)\right)=\left(H(t),\left(A^{-1}(t)\right)^*\chi_j(t)\right)=$$
$$=\left(H(t),\left(A^{-1}(t)\right)^*\frac{1}{\overline{\lambda}_j(t)}A^*(t)\chi_j(t)\right)=$$
$$=\frac{1}{\lambda_j(t)}\left(H(t),\chi_j(t)\right)=\frac{1}{\lambda_j(t)}\ddot{h}(t)\overline{\chi}_{2j}(t),\ j=1,\ 2,$$

то, учитывая выражения для $G(t,t)$, $\dot{\varphi}_j(t)$, $H(t)$, введенные ранее, запишем эту систему в виде

$$\begin{cases}\dot{\alpha}_1^{(0)}=\dfrac{k_0(t)+\lambda_1(t)k_1(t)-\dot{\lambda}_1(t)\lambda_1(t)}{\lambda_1(t)(\lambda_1(t)-\lambda_2(t))}\alpha_1^{(0)};\\ \alpha_1^{(0)}(0)=\dfrac{1}{\lambda_1(0)}\ddot{h}(0)\overline{\chi}_{21}(0);\\ \dot{\alpha}_2^{(0)}=\dfrac{k_0(t)+\lambda_2(t)k_1(t)-\dot{\lambda}_2(t)\lambda_2(t)}{\lambda_2(t)(\lambda_2(t)-\lambda_1(t))}\alpha_2^{(0)};\\ \alpha_2^{(0)}(0)=\dfrac{1}{\lambda_2(0)}\ddot{h}(0)\overline{\chi}_{22}(0).\end{cases}$$

Отсюда следует, что $\alpha_1^{(0)}(t)\equiv\alpha_2^{(0)}(t)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\ddot{h}(0)=0$. Поэтому для того чтобы имел место предельный переход

$$\left\|w(t,\varepsilon)-\overline{\overline{w}}(t)\right\|_{C[0,T]}\to 0\ (\varepsilon\to+0),\qquad (*)$$

необходимо и достаточно, чтобы $\ddot{h}(0)=0$. В этом случае

$$\overline{\overline{w}}(t)=w_0^{(0)}(t)=$$
$$=-A^{-1}(t)H(t)+\int_0^t R(t,x)\left(-A^{-1}(x)H(x)\right)dx,\qquad (23)$$

а предельным решением для исходной задачи (3) будет первая компонента вектор-функции $\overline{\overline{w}}(t)$, вычисляемая из уравнения

$$-K_0(t,t)\overline{\overline{y}}(t)-\int_0^t\left(2\left(\frac{\partial}{\partial t}K_0(t,x)\right)+(t-x)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}K_0(t,x)\right)\right)\overline{\overline{y}}(x)dx=\frac{d^2}{dt^2}h(t).\qquad (24)$$

Нетрудно проверить, что это уравнение можно получить из вырожденного уравнения по отношению к исходному (3) ($\varepsilon = 0$)

$$0=\int_0^t(t-x)K_0(t,x)\overline{\overline{y}}(x)dx+h(t)\qquad (25)$$

двойным дифференцированием по t. Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* 1, 2 *и все* $\mathrm{Re}\lambda_j(t)\le 0\left(\forall t\in[0,T]\right)$. *Тогда для того чтобы в задаче (4) имел место предельный переход (*), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $h(0)=\dot{h}(0)=\ddot{h}(0)=0$. *В этом случае предельное решение задачи (4) вычисляется по формуле (23), а предельное решение задачи (3) — из интегрального уравнения (25), эквивалентного уравнению (24).*

З а м е ч а н и е. Из теоремы 3 следует, что класс инициализации описывается условием $h(0)=\dot{h}(0)=\ddot{h}(0)=0$ и не зависит от ядра уравнения (3). Однако предельный режим $\overline{\overline{w}}(t)$ зависит от $G(t, x)$. Заметим также, что используя полученные результаты, можно исследовать предельный переход вне пограничного слоя при условии $\mathrm{Re}\lambda_j(t)<0,\ j=1,\ 2\ \left(\forall t\in[0,T]\right)$ и при нарушении условия $h(0)=\dot{h}(0)=\ddot{h}(0)=0$. В этом случае предельное решение $\tilde{y}(t)$ не совпадает с решением $\overline{\overline{y}}(t)$ вырожденного уравнения, а находится из интегрального уравнения со скачком

$$0=\int_0^t(t-x)K_0(t,x)\tilde{y}(x)dx+h(t)+\Delta(t),$$

где функция Δt вычисляется в процессе построения асимптотического решения исходного уравнения (3).

Литература

1. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Регуляризованные асимптотические решения сингулярно возмущенных интегральных систем с диагональным вырождением ядра // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 10. С. 1330—1341.

2. **Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф.** Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 519—536.

3. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.

4. **Сафонов В.Ф., Бободжанова М.А.** Предельный переход в сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнениях с нулевым оператором дифференциальной части // Вестник МЭИ. 2006. № 6. С. 91—100.

5. **Елисеев А.Г., Шапошникова Д.А.** Асимптотика сингулярно возмущенного интегрального уравнения Вольтерра // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С. 34—46.

References

1. **Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.** Regulyarizovannye Asimptoticheskie Resheniya Singulyarno Vozmushchennyh Integral'nyh Sistem s Diagonal'nym Vyrozhdeniem Yadra. Differentsial'nye uravneniya. 2001;37; 10:1330—1341. (in Russian).
2. **Bobodzhanova M.A., Safonov V.F.** Asimptoticheskiy Analiz Singulyarno Vozmushchennyh Integrodifferentsial'nyh Sistem s Nulevym Operatorom Differentsial'noy Chasti. Differentsial'nye Uravneniya. 2011;47;4:519—536. (in Russian).
3. **Lomov S.A., Lomov I.S.** Osnovy Matematicheskoy Teorii Pogranichnogo Sloya. M.: Izd-vo MGU, 2011. (in Russian).
4. **Safonov V.F., Bobodzhanova M.A.** Predel'nyy Perekhod v Singulyarno Vozmushchennyh Integrodifferentsial'nyh Uravneniyah s Nulevym Operatorom Differentsial'noy Chasti. Vestnik MPEI. 2006;6:91—100. (in Russian).
5. **Eliseev A.G., SHaposhnikova D.A.** Asimptotika Singulyarno Vozmushchennogo Integral'nogo Uravneniya Vol'terra. Vestnik MPEI. 2010;6:34—46. (in Russian).

Сведения об авторах

Бободжанов Абдухафиз Абдурасулович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: bobojanova@mpei.ru
Сафонов Валерий Федорович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ»

Information about authors

Bobodzhanov Abdukhafiz A. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: bobojanova@mpei.ru
Safonov Valeriy F. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI

Статья поступила в редакцию 15.03.2017