УДК 517.95
DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-140-145

Некоторые нестандартные задачи трехмерной теории поля

Ю.А. Дубинский

Рассмотрены краевые задачи для системы уравнений Пуассона в трехмерном пространстве, в граничных условиях которых помимо значений функций содержатся и значения градиента, дивергенции и ротора. В основе постановки таких задач лежит тождество, содержащее безусловную связь между граничными значениями любой пары функций и значениями векторов их нормальных производных и роторов. Тождество является следствием известного представления оператора Лапласа в роторно-дивергентной форме. Подобные условия имеют ясный гидродинамический смысл и генерируют соответствующие подпространства пространства Соболева. Кроме того, полученное тождество может рассматриваться как необходимое условие наличия теоремы о гладкости обобщенных или слабых решений рассмотренных задач.
Соответствующие краевые задачи корректно разрешимы в слабом смысле, т. е. имеют единственное слабое решение. Приведены конкретные примеры. Для доказательства использован метод Галеркина, базирующийся на равенстве билинейных форм, отвечающих стандартной записи оператора Лапласа и его роторно-дивергентного представления. Именно равенство этих форм определяет различные типы граничных условий, содержащих основные операции теории поля: градиент, дивергенцию и ротор искомого решения. Установлена компактность последовательности приближенных решений и совершен предельный переход.
Предложенный подход позволяет сформулировать некоторые нестандартные задачи для системы уравнений Стокса и Навье — Стокса.

Ключевые слова: трехмерная теория поля, градиент, вектор нормальных производных, дивергенция, ротор, граничные условия.

Для цитирования: Дубинский Ю.А. Некоторые нестандартные задачи трехмерной теории поля // Вестник МЭИ. 2017. № 6. С. 140—145. DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-140-145.

Some Nonstandard Problems in the 3D Field Theory

Yu.A. Dubinskii

The article considers certain boundary-value problems for the Poisson system of equations in the 3D space the boundary conditions of which contain, apart from the function values, the values of gradient, divergence and curl.
The statement of such problems is based on an identity containing unconditional link between the boundary values of any pair of functions and the values of vectors of their normal derivatives and curls. Such identity follows from well-known formula representing the Laplace operator in the curl-divergence form. Such conditions have a clear hydrodynamic sense and generate the corresponding subspaces of the Sobolev space. In addition, the obtained identity can be considered as the necessary condition for the theorem about the smoothness of generalized or weak solutions of the considered problems.
The corresponding boundary-value problems are correctly solvable in the weak sense; that is, they have a unique weak solution. Some specific examples are given. For the proof, the author used the Galerkin method, which is based on the equality of the bilinear forms consistent with the standard formulation of the Laplace operator and its curl-divergence form. It is exactly the equality of these forms that determines different types of boundary conditions containing the basic operations of the field theory, namely, gradient, divergence and curl of the sought solution. It has been shown that the sequence of approximate solutions is compact in nature, and passage to the limit has been done.
By using the proposed approach it becomes possible to formulate some nonstandard problems for the Stokes and Navier-Stokes systems of equations.

Key words: 3D field theory, gradient, vector of normal derivatives, divergence, curl, boundary conditions.

For citation: Dubinskii Yu.A. Some Nonstandard Problems in the 3D Field Theory. MPEI Vestnik. 2017; 6:140—145. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2017-6-140-145.

Рассмотрен ряд краевых задач теории поля с гидродинамическими граничными условиями, простейшими из которых являются задачи для системы уравнений Пуассона

$$\begin{aligned}&-\Delta u(x) = h(x);\ x \in G \subset \mathbb{R}^3;\\ &(u,n)_\Gamma = 0,\ [\operatorname{rot} u, n]_\Gamma = 0;\\ &-\Delta u(x) = h(x);\ x \in G \subset \mathbb{R}^3;\\ &[u,n]_\Gamma = 0,\ (\operatorname{div} u)_\Gamma = 0.\end{aligned}$$

В основе построения рассматриваемых задач лежит некоторое тождество-навигатор, связывающее граничные значения любой пары гладких вектор-функций в области G с граничными значениями их градиентов, роторов и дивергенций. Это тождество является «необходимым условием» формирования любой классической граничной задачи теории поля в том смысле, что всякое ее решение обязано удовлетворять этому тождеству. Оно же определяет и пространство для постановки задачи в слабом или обобщенном виде.

Тождества-навигаторы

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ — некоторая область в трехмерном евклидовом пространстве, а Γ — ее граница. Тогда $u = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$, $v = (v_1(x), v_2(x), v_3(x))$ — произвольные вектор-функции, определенные в области G. Допустим, что $u(x) \in W_2^2(G)$ и $v(x) \in W_2^2(G)$, где $W_2^2(G)$ — пространство Соболева вектор-функций в области G.

Утверждение 1. Каковы бы ни были вектор-функции $u(x) \in W_2^2(G)$ и $v(x) \in W_2^2(G)$, имеет место граничное тождество

$$\int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n} - [\operatorname{rot} u, n] - \operatorname{div} u \cdot n, v \right) d\gamma = \\ = \int_\Gamma \left(u, \frac{\partial u}{\partial n} - [\operatorname{rot} u, n] - \operatorname{div} u \cdot n \right) d\gamma, \tag{1}$$

где $n = (n_1, n_2, n_3)$ — вектор внешней нормали к границе Γ области G;

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}, \frac{\partial u_3}{\partial n} \right); \ \frac{\partial v}{\partial n} = \left(\frac{\partial v_1}{\partial n}, \frac{\partial v_2}{\partial n}, \frac{\partial v_3}{\partial n} \right)$$

— векторы нормальных производных компонент функций $u(x)$ и $v(x)$; $\operatorname{rot}u$, $\operatorname{rot}v$ — роторы вектор-функций $u(x)$ и $v(x)$; $\operatorname{div}u$, $\operatorname{div}v$ — дивергенции.

Обозначим

$$\partial_\Gamma u \equiv \frac{\partial u}{\partial n} - [\operatorname{rot} u, n] - \operatorname{div} u \cdot n$$

и запишем тождество (1) в виде

$$\int_\Gamma (\partial_\Gamma u, v) d\gamma = \int_\Gamma (u, \partial_\Gamma u) d\gamma.$$

Очевидно, оператор ∂_Γ — симметричный оператор, определенный в пространстве $W_2^2(G)$ со значениями в пространстве $W_2^{1/2}(G)$.

Нас интересует ядро оператора ∂_Γ, которое, как оказывается, тесно связано с интегральным тождеством

$$\int_G (\nabla u, \nabla v) dx \equiv \int_G \left[(\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v) + \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v \right] dx. \tag{2}$$

Утверждение 2. Для любых функций $u(x) \in W_2^2(G)$ и $v(x) \in W_2^1(G)$ тождество (2) имеет место в том и только том случае, если функция $u(x) \in \operatorname{Ker}\partial_\Gamma$, т.е. на границе Γ

$$\frac{\partial u}{\partial n} - [\operatorname{rot} u, n] - \operatorname{div} u \cdot n = 0.$$

Доказательство утверждений вытекает из известной формулы теории поля [1, 2]

$$-\Delta u \equiv \operatorname{rot}^2 u - \nabla \operatorname{div} u, x \in G. \tag{3}$$

Умножив (3) на $v(x)$ и интегрируя по частям, получим

$$\int_G (\nabla u, \nabla v) dx - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n}, v \right) d\gamma = \int_G (\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v) dx - \\ - \int_\Gamma ([\operatorname{rot} u, n], v) d\gamma + \int_G \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v dx - \int_\Gamma \operatorname{div} u \cdot (v, n) d\gamma$$

или

$$\int_G (\nabla u, \nabla v) dx = \int_G \left((\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v) + \operatorname{div} u \cdot \operatorname{div} v \right) dx + \\ + \int_\Gamma (\partial_\Gamma u, v) d\gamma.$$

Отсюда следует утверждение 2. Меняя местами $u(x)$ и $v(x)$, получим, что для любых $u(x) \in W_2^2(G)$ и $v(x) \in W_2^2(G)$ справедливо и утверждение 1.

Выбор краевых условий

Полученное тождество (1)

$$\int_\Gamma (\partial_\Gamma u, v) d\gamma = \int_\Gamma (u, \partial_\Gamma u) d\gamma,$$

справедливое для любых функций $u(x) \in W_2^2(G)$ и $v(x) \in W_2^2(G)$, обязывает рассматривать его как необходимое условие корректности всякой классической краевой задачи трехмерной теории поля.

Если же речь идет о слабой или обобщенной постановке краевой задачи, то оно становится необходимым условием справедливости теоремы о гладкости слабых или обобщенных решений, коль скоро данные задачи выбраны гладкими.

Таким образом, при всех обстоятельствах тождество (1) подсказывает возможные постановки краевых задач, которые либо корректны в смысле Адамара – Перовского, либо нормально разрешимы.

Практическая реализация каждой такой подсказки определяется выбором подпространств пространства $W_2^2(G)$, для которых имеют место тождества (1) и (2).

Последнее означает, что для таких вектор-функций $u_0(x)$

$$\int_G (\nabla u_0, \nabla v) dx = \int_G \left[(\operatorname{rot} u_0, \operatorname{rot} v) + \operatorname{div} u_0 \cdot \operatorname{div} v \right] dx$$

для любой пробной функции $v(x) \in W_2^1(G)$.

Таким образом, операторы

$$-\Delta u_0 = -\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_3^2} \right)$$

и $\delta u_0 = \operatorname{rot}^2 u_0 - \nabla \operatorname{div} u_0 U$ как функционалы, действующие по правилам

$$\langle -\Delta u_0, v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_G (\nabla u_0, \nabla v) dx - \int_\Gamma \left(\frac{\partial u_0}{\partial n}, v \right) d\gamma$$

и

$$\langle \delta u_0, v\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_G \Big((\operatorname{rot} u_0, \operatorname{rot} v) + \operatorname{div} u_0 \cdot \operatorname{div} v \Big) dx -$$

$$- \int_\Gamma \Big([\operatorname{rot} u_0, n] + \operatorname{div} u_0 \cdot n, v \Big) d\gamma,$$

совпадают для всех пробных функций $v(x) \in W_2^1(G)$.

Именно эти подпространства являются естественными, в которых ищут классическое или обобщенное решение $u_0(x)$ как системы $-\Delta u_0(x) = h(x)$, $x \in G$, так и $\delta u_0(x) = h(x)$, $x \in G$, одновременно.

Рассмотрим характерные примеры.

Граничные условия Дирихле

Пусть $u_0(x) \in W_2^2(G)$ и $v(x) \in W_2^2(G)$, при этом $u_0|_\Gamma = 0$. В этом случае тождество (1) превращается в $\int_\Gamma (\partial_\Gamma u_0, v)\, d\gamma = 0$, а $v(x) \in W_2^2(G)$ произвольна. Следовательно $\partial_\Gamma u_0 = 0$, и, тем самым, справедливо и тождество (2). Таким образом, условия Дирихле вполне согласованы с описанным подходом.

Заметим, что импликация $u_0|_\Gamma = 0 \Rightarrow \partial_\Gamma u_0 = 0$ может быть установлена и прямым подсчетом.

Тангенциальные граничные условия

Рассмотрим подпространство

$$W_{2,tang}^2(G) = \left\{ u(x) \in W_2^2(G) : (u, n)_\Gamma = 0 \right\},$$

т.е. подпространство вектор-функций $u(x) \in W_2^2(G)$, нормальная составляющая которых на границе равна нулю (в любой граничной точке $x \in \Gamma$ вектор-функция может быть представлена в виде

$$u(x) = (u, n)n + [n, [u, n]],$$

где $u_{norm} = (u, n)n$, $u_{tang} = n$, $[u, n]]$ — ее нормальная и тангенциальная составляющие.

Очевидно, для функций $u(x) \in W_{2,tang}^2(G)$ и $v(x) \in W_{2,tang}^2(G)$ тождество-навигатор примет вид

$$\int_\Gamma \left(\partial_{\Gamma,tang} u, v \right) d\gamma = \int_\Gamma \left(u, \partial_{\Gamma,tang} v \right) d\gamma, \tag{4}$$

где

$$\partial_{\Gamma,tang} u = \frac{\partial u}{\partial n} - [\operatorname{rot} u, n], \partial_{\Gamma,tang} v = \frac{\partial v}{\partial n} - [\operatorname{rot} v, n].$$

Ясно, что для любой пары функций $u(x)$, $v(x)$, удовлетворяющих условиям

$$(u,n)_\Gamma = 0,\ \partial_\Gamma u = 0;\ (v,n)_\Gamma = 0,\ \partial_\Gamma v = 0,$$

выполнены как тождество-навигатор (1), так и тождество (2). Рассмотрим задачу о поиске решения обеих систем

$$-\Delta u(x) = h(x),\ \delta u(x) = h(u),\ x \in G,$$

при граничных условиях

$$(u, n)_\Gamma = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial n} - [\operatorname{rot} u, n], n \right)_\Gamma = 0.$$

Нормальные граничные условия

Они аналогичны тангенциальным условиям.

Пусть

$$W_{2,norm}^2(G) = \left\{ u(x) \in W_2^2(G) : [u, n]_\Gamma = 0 \right\}$$

— подпространство пространства $W_2^2(G)$, состоящее из вектор-функций, касательная составляющая которых на границе равна нулю.

Очевидно, для функций $u(x) \in W_{2,norm}^2(G)$ и $v(x) \in W_{2,norm}^2(G)$ тождество-навигатор (1) примет вид

$$\int_\Gamma \left(\partial_{\Gamma,norm} u, v \right) d\gamma = \int_\Gamma \left(u, \partial_{\Gamma,norm} v \right) d\gamma, \tag{5}$$

где

$$\partial_{\Gamma,norm} u \equiv \frac{\partial u}{\partial n} - \operatorname{div} u \cdot n.$$

Таким образом, придем к задаче нахождения решения систем уравнений

$$-\Delta u(x) = h(x),\ \delta u(x) = h(u),\ x \in G$$

при условиях

$$[u, n]_\Gamma = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial n} - \operatorname{div} u \cdot n, n \right)_\Gamma = 0$$

или

$$[u, n]_\Gamma = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial n}, n \right)_\Gamma - (\operatorname{div} u)_\Gamma = 0.$$

Условие $\partial_\Gamma u = 0$

Пусть

$$W_{2,0}^2(G) = \left\{ u(x) \in W_2^2(G) : \partial_\Gamma u = 0 \right\}.$$

Очевидно, для любых функций $u(x)$ и $v(x)$ выполняются тождество-навигатор (1) и интегральное тождество (2).

Найдем решения систем

$$-\Delta u(x) = h(x),\ \delta u(x) = h(u),\ x \in G, \tag{6}$$

в пространстве $W_{2,0}^2(G)$, т. е. при условии

$$\frac{\partial u}{\partial n} - [\operatorname{rot} u, n] - \operatorname{div} u \cdot n = 0 \tag{7}$$

на границе Γ.

Условие Неймана

Пусть $\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0$. Тогда задача (6), (7) сводится к вопросу отыскания решения систем

$$-\Delta u(x) = h(x),\ \delta u(x) = h(u),\ x \in G,$$

при условиях

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0, \left([\operatorname{rot} u, n] + \operatorname{div} u \cdot n \right)_\Gamma = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0, [\operatorname{rot} u, n]_\Gamma = 0, (\operatorname{div} u)_\Gamma = 0.$$

Вывод

Итак, мы пришли к вопросу нахождения решения систем уравнений

$$-\Delta u(x) = h(x),\ \delta u(x) = h(u),\ x\in G,$$

при следующих граничных условиях:

$$u|_\Gamma = 0; \tag{8}$$

$$\left(u,n\right)_\Gamma = 0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} - \left[\mathrm{rot}\, u\right], n\right]_\Gamma = 0; \tag{9}$$

$$\left(u,n\right)_\Gamma = 0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0,\ \left[\mathrm{rot}\, u, n\right]_\Gamma = 0; \tag{10}$$

$$\left[u,n\right]_\Gamma = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}, n\right)_\Gamma - \left(\mathrm{div}\, u\right)_\Gamma = 0; \tag{11}$$

$$\left[u,n\right]_\Gamma = 0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}, n\right)_\Gamma = 0,\ \left(\mathrm{div}\, u\right)_\Gamma = 0; \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \left[\mathrm{rot}\, u, n\right] - \mathrm{div}\, u \cdot n\right)_\Gamma = 0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = 0,\ \left[\mathrm{rot}\, u, n\right]_\Gamma = 0,\ \left(\mathrm{div}\, u\right)_\Gamma = 0. \tag{14}$$

Обсуждение задач

Задача Дирихле

В области $G \subset \mathbb{R}$ с границей Γ рассматривается задача Дирихле для систем уравнений

$$-\Delta u(x) = h(x);\ \delta u(x) = h(x),\ x\in G,\ u(x)|_\Gamma = 0.$$

Очевидно, в данном случае речь идет о вопросе: является ли решение задачи Дирихле для системы Пуассона

$$-\Delta u(x) = h(x),\ u|_\Gamma = 0 \tag{15}$$

решением задачи Дирихле для системы уравнений

$$\delta u(x) = h(x),\ u|_\Gamma = 0. \tag{16}$$

Пусть $h(x)\in L_2(G)$, тогда решение задачи (15) $u(x)\in W_2^2(G)$ (условия на границу Γ не рассматриваются) является классическим решением задачи (16).

Отметим, что если $u|_\Gamma = 0$, то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \left[\mathrm{rot}\, u, n\right] - \mathrm{div}\, u \cdot n\right)_\Gamma = 0.$$

В соответствии с утверждением 2 это значит, что решение задачи Дирихле (15) удовлетворяет тождеству

$$\int_G \left(\nabla u, \nabla v\right) dx = \int_G \left(\left(\mathrm{rot}\, u, \mathrm{rot}\, v\right) + \mathrm{div}\, u \cdot \mathrm{div}\, v\right) dx =$$

$$= \int_G \left(h, v\right) dx$$

не только для функций $v(x)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(G)$, но и для всех $v(x)\in W_2^1(G)$.

Отметим, что каждое из перечисленных выше условий определяет некоторое подпространство пространства $W_2^1(G)$, на котором операторы Δu и δu совпадают как функционалы над пространством $W_2^1(G)$. Структура подпространств зависит от вида области. В частности, если G — многогранник, то в задачах с условиями (9) и (11) граничные условия распадаются на отдельные условия для операторов Δ и δ_3 и, тем самым, речь идет о решении краевой задачи для системы Пуассона на предмет, является ли оно решением системы $\delta u = h(x)$ при соответствующих естественных граничных условиях.

Задачи с условиями (10) и (12).

Лемма 1. Пусть $u(x)\in W_2^2(G)$, где $G \subset \mathbb{R}^3$ — многогранник. Тогда условия

$$\left(u,n\right)_\Gamma = 0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0;$$

$$\left(u,n\right)_\Gamma = 0,\ \left[rot\, u, n\right]_\Gamma = 0$$

совпадают.

Доказательство. Действительно, для каждой грани многогранника G условие $(u, n)_\Gamma = 0$ означает, что в базисе (τ_1, τ_2, τ_3), где (τ_1, τ_2) — тангенциальный базис, а $\tau_3 = n$, имеет место равенство $u_3(\tau_1, \tau_2, 0) \equiv 0$, следовательно, в любой точке этой грани

$$\frac{\partial u_3}{\partial \tau_1} = 0;\ \frac{\partial u_3}{\partial \tau_2} = 0. \tag{17}$$

В то же самое время условие $\left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0$ означает коллинеарность вектора $\frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau_3}, \frac{\partial u_2}{\partial \tau_3}, \frac{\partial u_3}{\partial \tau_3}\right)$ вектору нормали, т. е.

$$\frac{\partial u_1}{\partial \tau_3} = 0;\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau_3} = 0.$$

Следовательно, для компонент ротора rot$u$ имеем

$$\left(\mathrm{rot}\, u\right)_1 = \frac{\partial u_3}{\partial \tau_2} - \frac{\partial u_2}{\partial \tau_3} = 0; \tag{18}$$

$$\left(\mathrm{rot}\, u\right)_2 = \frac{\partial u_1}{\partial \tau_3} - \frac{\partial u_3}{\partial \tau_1} = 0 \tag{19}$$

в любой точке M выбранной грани. Это означает, что

$$[\mathrm{rot}\, u(M),\ n] = 0.$$

Наоборот, если $(u(M), n)_\Gamma = 0$ и при этом $[\mathrm{rot}\, u(M), n] = 0$, то из равенств (17) — (19) следует, что $\frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0;\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0$, т. е.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n}, n\right]_\Gamma = 0.$$

Лемма доказана.

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 2. Пусть $u(x)\in W_2^2(G)$, где $G\subset\mathbb{R}^3$ — многогранник. Тогда условия

$$[u,n]_\Gamma=0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial n},n\right)_\Gamma=0;$$
$$[u,n]_\Gamma=0,\ (\operatorname{div}u)_\Gamma=0$$

совпадают.

Таким образом, всякое классическое решение $u(x)\in W_2^2(G)$ задачи

$$-\Delta u(x)=h(x),\ x\in G;$$
$$(u,n)_\Gamma=0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial n},n\right]_\Gamma=0$$

есть решение задачи

$$-\Delta u(x)=h(x),\ x\in G,$$
$$(u,n)_\Gamma=0,\ [\operatorname{rot}u,n]_\Gamma=0$$

и одновременно решение задачи

$$\delta u(x)=h(x), x\in G,$$
$$(u,n)_\Gamma=0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial n},n\right]_\Gamma=0$$

или

$$\delta u(x)=h(x),\ x\in G,\ (u,n)_\Gamma=0,\ [\operatorname{rot}u,n]_\Gamma=0.$$

Это справедливо и для обобщенных решений задачи с условиями (10).

Теорема 1. *Для любой правой части $h(x)\in L_2(G)$ существует единственное обобщенное решение задачи*

$$-\Delta u(x)=h(x),\ x\in G,$$

с условиями

$$(u,n)_\Gamma=0,\ \left[\frac{\partial u}{\partial n},n\right]_\Gamma=0$$

или

$$(u,n)_\Gamma=0,\ [\operatorname{rot}u,n]_\Gamma=0.$$

При этом под решением этих задач понимается функция $u(x)\in W^1_{2,tang}(G)$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_G(\nabla u,\nabla v)\,dx=\int_G(h,v)\,dx,$$

где $v(x)\in W^1_{2,tang}(G)$ — произвольная пробная функция.

В силу леммы 1 это решение является и обобщенным решением задачи

$$\delta u(x)=h(x),$$
$$(u,n)_\Gamma=0,\ [\operatorname{rot}u,n]_\Gamma=0,$$

т. е. удовлетворяет тождеству

$$\int_G\left[(\operatorname{rot}u,\operatorname{rot}v)+\operatorname{div}u\cdot\operatorname{div}v\right]dx=\int_G(h,v)\,dx$$

для любой пробной функции $v(x)\in W^1_{2,tang}(G)$.

Аналогичные утверждения имеют место и для задач

$$-\Delta u(x)=h(x),\ \ \delta u(x)=h(x),\ \ x\in G,$$

при условиях (12)*, т.е.*

$$[u,n]_\Gamma=0,\ \left(\frac{\partial u}{\partial n},n\right)_\Gamma=0$$

или

$$[u,n]_\Gamma=0,\ (\operatorname{div}u)_\Gamma=0.$$

При этом роль соответствующего подпространства пространства $W_2^1(G)$ играет пространство

$$W^1_{2,norm}(G)=\left\{u(x)\in W_2^1(G):[u,n]_\Gamma=0\right\}.$$

Теорема 2. *Для любой правой части $h(x)\in L_2(G)$ существует единственное обобщенное решение задачи с условиями (12), т. е. функция $u(x)\in W^1_{2,norm}(G)$, удовлетворяющая интегральному тождеству*

$$\int_G(\nabla u,\nabla v)\,dx=\int_G(h,v)\,dx;\ \forall\,v(x)\in W^1_{2,norm}(G).$$

Доказательство теорем 1, 2 приведено в [3 — 5].

Общий случай. Задачи с условиями (13), (14)

В данном случае на каждой грани области G в базисе (τ_1,τ_2,τ_3), где (τ_1,τ_2) — касательный базис, а $\tau_3=n$, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left(\frac{\partial u_1}{\partial\tau_3},\frac{\partial u_2}{\partial\tau_3},\frac{\partial u_3}{\partial\tau_3}\right);$$
$$[\operatorname{rot}u,n]=\left(\frac{\partial u_1}{\partial\tau_3}-\frac{\partial u_3}{\partial\tau_1},\frac{\partial u_2}{\partial\tau_3}-\frac{\partial u_3}{\partial\tau_2},0\right);$$
$$\operatorname{div}u\cdot n=\left(0,0,\frac{\partial u_1}{\partial\tau_1}+\frac{\partial u_2}{\partial\tau_2}+\frac{\partial u_3}{\partial\tau_3}\right).$$

Равенство

$$\partial_\Gamma u\equiv\frac{\partial u}{\partial n}-[\operatorname{rot}u,n]-\operatorname{div}u\cdot n=0$$

приводит к условиям

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0;\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2}=0;\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=0,$$

т. е. на выбранной грани у всякой вектор-функции $u=(u_1,u_2,u_3)$ ее нормальная составляющая имеет плоский нулевой градиент, а касательная составляющая — плоскую нулевую дивергенцию.

Замыкание множества таких функций в пространстве $W_2^1(G)$ обозначим через $W^1_{2,0}(G)$. Именно в пространстве $W^1_{2,0}(G)$ находится обобщенное решение задачи

$$-\Delta u(x)=h(x),\ \ \delta u(x)=h(x)$$

при условии

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} - [\operatorname{rot} u, n] - \operatorname{div} u \cdot n\right)_{\Gamma} = 0.$$

Подробное описание представлено в [6].

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (соглашение № 14-11-00306).

Литература

1. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974.

2. **Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.** Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980.

3. **Dubinskii Yu.A.** Some Coercive Problems for the System of Poisson Equations // Russian J. Mathematical Phys. 2013. V. 20. No. 4. Pp. 402—412.

4. **Карчевский М.М., Шагиддулин Р.Р.** О краевых задачах для эллиптических систем уравнений второго порядка дивергентного вида // Ученые записки Казанского ун-та. 2015. Кн. 2. С. 93—103.

5. **Карчевский М.М., Павлова М.Ф.** Уравнения математической физики. С-Петербург: Лань, 2016.

6. **Дубинский Ю.А.** Об одной формуле теории поля и соответствующей краевой задаче // Проблемы математического анализа. 2016. Вып. 87. С. 121—127.

References

1. **Korn G., Korn T.** Spravochnik po Matematike dlya Nauchnyh Rabotnikov i Inzhenerov. M.: Nauka, 1974. (in Russian).

2. **Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A.** Spravochnik po Matematike dlya Inzhenerov i Uchashchihsya Vtuzov. M.: Nauka, 1980. (in Russian).

3. **Dubinskii Yu. A.** Some Coercive Problems for the System of Poisson Equations. Russian J. Mathematical Phys. 2013;20;4:402—412.

4. **Karchevskiy M.M., Shagiddulin R.R.** O Kraevyh Zadachah dlya Ellipticheskih Sistem Uravneniy Vtorogo Poryadka Divergentnogo Vida. Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. 2015;2:93—103. (in Russian).

5. **Karchevskiy M.M., Pavlova M.F.** Uravneniya Matematicheskoy Fiziki. S-Peterburg: Lan', 2016. (in Russian).

6. **Dubinskiy Yu.A.** Ob Odnoy Formule Teorii Polya i Sootvetstvuyushchey Kraevoy Zadache. Problemy Matematicheskogo Analiza. 2016;87:121—127. (in Russian).

Сведения об авторе

Дубинский Юлий Андреевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: julii_dubinskii@mail.ru

Information about author

Dubinsky Yuliy A. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: julii_dubinskii@mail.ru

Статья поступила в редакцию 06.03.2017