УДК 621.372.88
DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-112-118

Модифицированное уравнение связанных мод параллельных диэлектрических волноводов

А.С. Андреев, В.В. Крутских

В настоящее время большинство ученых используют обыкновенную (ортогональную) формулировку теории связанных мод, несмотря, на активное использование ее на практике. Показаны ее неточность и ошибочность в случае сильно связанных мод. При моделировании устройств (в случае уменьшения их габаритов), использующих эффекты распределенной связи диэлектрических волноводов, или анализе паразитных перекачек энергии в системах с плотно упакованными диэлектрическими волноводами неизбежно столкновение с сильным отклонением теоретических предсказаний. В качестве альтернативы предложена модифицированная (или неортогональная) формулировка, дающая большую точность.

Для вывода уравнения связанных мод в неортогональной формулировке ранее был использован предварительный вывод теории возбуждения волноводов произвольными источниками и на основании этих результатов выведено искомое уравнение. Несмотря на то, что подобный подход позволяет давать полученным результатам наиболее общие физические интерпретации, он кажется избыточным для вывода уравнения связи параллельных диэлектрических волноводов, а также труден для анализа и проверки. В нем необходимо предварительно определить эквивалентные токи, вызванные влиянием полей для каждого отдельного волновода связанными с ним модами соседних.

Приведен способ вывода уравнения связанных мод в неортогональной формулировке, фактически использующий только уравнения Максвелла, а также анзац в виде суммы мод отдельных волноводов и изначально неизвестных дополнительных полей, связанных со взаимным влиянием близко расположенных волноводов. Получены выражения для этих полей через поля мод волноводов и дополнительные коэффициенты объемной и поверхностной связи. В данном случае был проигнорирован непрерывный спектр мод, а взят только дискретный, как для простоты вывода, так и благодаря доступности для экспериментального анализа.

Ключевые слова: уравнение связанных мод, многомодовый диэлектрический волновод, коэффициенты связи, неортогональная формулировка.

Для цитирования: Андреев А.С., Крутских В.В. Модифицированное уравнение связанных мод параллельных диэлектрических волноводов // Вестник МЭИ. 2018. № 1. С. 112—118. DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-112-118.

A Modified Coupled Mode Equation For Parallel Dielectric Waveguides

A.S. Andreev, V.V. Krutskikh

Despite the fact that the coupled mode theory is widely used for practical applications, the majority of researchers still employ the conventional (or so-called orthogonal) formulation of this theory. It is shown that this formulation lacks accuracy and yields erroneous results in the case of strongly coupled modes. Those who model compact devices using the effects of distributed coupling between dielectric waveguides or analyze parasitic energy transfer phenomena in systems with tightly packed dielectric waveguides would inevitably encounter significant deviation of theoretical predictions from reality. A modified (or non-orthogonal) formulation is proposed which yields better accuracy.

Previously a preliminary corollary of the theory of waveguide excitation by arbitrary sources was used for deriving the coupled mode equation in a non-orthogonal formulation, and the sought equation has been derived proceeding from these results. Despite the fact that such approach

allows the obtained results to be interpreted in the most general physical manner, it seems to be excessive for deriving the equation for coupling of parallel dielectric waveguides; in addition, the approach is difficult to analyze and check. Prior to use this approach, it is necessary to determine the equivalent currents induced by the fields for each individual waveguide (from the associated modes of adjacent waveguides).
The article presents a method for deriving the coupled mode equation in the non-orthogonal formulation based on using solely Maxwell's equations and an ansatz involving the sum of modes of individual waveguides and initially unknown additional fields related to the mutual influence of closely located waveguides. The expressions for these fields in terms of the fields of waveguide modes and the additional coefficients of volume and surface coupling are obtained. In the considered case, the discrete spectrum of modes was adopted instead of the continuous one to simplify the derivation and owing to its accessibility for experimental analysis.

Key words: coupled mode equation, multimode dielectric waveguide, coupling coefficients, non-orthogonal formulation.

For citation: Andreev A.S., Krutskikh V.V. A Modified Coupled Mode Equation For Parallel Dielectric Waveguides. MPEI Vestnik. 2018;1:112—118. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2018-1-112-118.

Введение

Эффекты распределенной связи открытых волноведущих структур применяются в оптическом и радиодиапазонах при проектировании фильтров, направленных ответвителей и других пассивных элементов тракта [1]. В настоящее время исследуются многомодовые диэлектрические структуры. На их базе создают пассивные устройства, использующие многомодовую интерференцию для формирования полей с определенным амплитудно-фазовым распределением. Наибольшее применение такие структуры нашли в интегральной оптике в качестве основы для направленных ответвителей и делителей мощности, а также модовых синтезаторов [2 — 4].

В связи с увеличением объемов информации, передаваемой по оптоволокну, идет активный поиск новых способов уплотнения информации. Одним из них является модовое разделение каналов, которое предлагается использовать для передачи данных по оптическим шинам в интегральных схемах [5 — 7]. Эффекты связи позволяют гибко контролировать амплитуды и фазы спектра мод в многомодовой структуре, поэтому актуально и своевременно изучение этих эффектов между многомодовыми диэлектрическими структурами как одинаковых, так и различных форм и размеров. Понимание законов связи в данных системах позволит создать новые классы пассивных устройств.

Связь и преобразование мод в диэлектрических структурах носит не только положительный, но и негативный эффект, определенный паразитной перекачкой энергии в системах с плотной упаковкой диэлектрических элементов. Примером служат многоканальные системы микроволновой диагностики на базе решеток из волноводно-пучковых формирователей (рис. 1). Элементы в таких решетках располагаются достаточно плотно, из-за этого между волноводами возникает распределенная связь, которая приводит к искажению амплитудно-фазового распределения электромагнитного поля на торцах формирователей.

Анализ публикаций показал, что существуют две основные формулировки теории связанных мод: обычная и модифицированная. Отличие между ними состоит лишь в том, что обычная формулировка представляет поле связанных волноводов в виде суммы спектров мод каждого отдельного волновода [8 — 11]. В связи с этим ее называют ортогональной формулировкой. В реальности это предположение может быть справедливо только для слабо связанных волноводов, находящихся далеко друг от друга. Более полноценное представление описывается модифицированной (или неортогональной) формулировкой, которая представляет наибольший интерес из-за того, что на практике анализируются сильно связанные волноводы.

Авторы [12 — 14] описывают модифицированную формулировку, исходя из нестрогих предположений о взаимном влиянии связанных волноводов. По неясным причинам они игнорируют один член уравнения, связанный с эффективными поверхностными токами на границах раздела сред. Фактически была найдена единственная работа [14], в которой продемонстрировано полное уравнение связанных мод без этой ошибки. В ней модифицированная теория представлена наи-

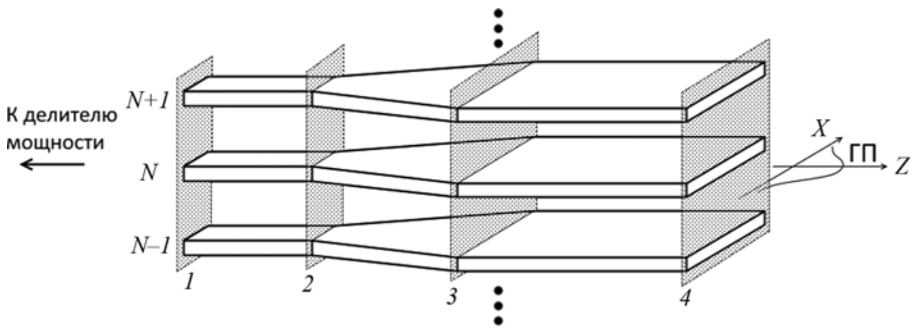

Рис. 1. Пример одномерной решетки волноводно-пучковых формирователей многоканальной системы микроволновой диагностики: ГП — формируемый гауссов пучок

более строго и полно, однако вывод уравнения связи осуществляется с использованием теории возбуждения волноводов сторонними источниками. Это делает многие этапы вывода излишне запутанными, что затрудняет проверку и применение теории.

Вывод уравнения связи может быть сделан без введения теории возбуждения сторонними источниками. Достаточно использовать только уравнения Максвелла и учитывать наличие дополнительных полей, помимо полей спектра мод отдельных волноводов. Дополнительные поля представляют собой «искажения» мод волноводов из-за их взаимного влияния. Таким образом, прийдем к двум дополнительным коэффициентам связи — объемному и поверхностному, которые позволят наиболее полно проанализировать эффекты связи даже для случаев сильно связанных волноводов.

Цель настоящей работы заключается в демонстрации вывода уравнения и формулировке наиболее удобного и полного способа анализа распространения волн в связанных многоволноводных и многомодовых системах.

Вывод модифицированного уравнения связанных мод

Для вывода уравнений распределенной связи воспользуемся следующими предположениями и упрощениями.

Поле каждого волновода представимо в виде суммы мод, а также дополнительного электромагнитного поля, представляющего собой ортогональное к модам дополнение, причиной возникновения которого является взаимное влияние волноводов.

Пренебрежем связью с непрерывным спектром мод из-за ее малости. Дискретный спектр мод наиболее доступен для экспериментального анализа и представляет наибольший практический интерес. В случае необходимости добавление к анализу непрерывного спектра мод можно провести аналогичным дискретному образом. Пренебрежем и потерями в волноводах. В случае необходимости можно учесть потери, заменив действительное волновое число на комплексное, тогда мы получим, что электромагнитное поле системы связанных волноводов можно представить следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}(r,z)=\sum_w\sum_m \dot{A}_m^w(z)\,\dot{\mathbf{E}}_m^w(r,z)+\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}}(r,z); \qquad (1)$$

$$\dot{\mathbf{H}}(r,z)=\sum_w\sum_m \dot{A}_m^w(z)\,\dot{\mathbf{H}}_m^w(r,z)+\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}}(r,z), \qquad (2)$$

где $\dot{\mathbf{E}}(r, z)$, $\dot{\mathbf{H}}(r, z)$ — комплексные вектора напряженностей электрического и магнитного полей, зависящие от поперечных координат, записанных в виде радиус-вектора $\boldsymbol{r}$, и продольной координаты z. Верхним индексом отмечен номер волновода w, в котором распространяется соответствующая мода m. Каждая мода имеет изменяющуюся при распространении вдоль волновода амплитуду $A_w^m(z)$. Поля с нижним индексом ort обозначают дополнительные ортогональные поля. Добавим их, исходя из того, что сумма мод отдельных волноводов не является решением для их совокупности. Поэтому необходима поправка, которая будет тем больше, чем ближе волноводы в системе друг к другу.

Будем считать, что относительная диэлектрическая проницаемость системы волноводов $\varepsilon_r(r)$ зависит только от поперечных координат, а магнитная проницаемость всюду равна μ_0, тогда уравнения Максвелла для комплексных амплитуд будут выглядеть как

$$\nabla\times\dot{\mathbf{E}}=-j\omega\mu_0\dot{\mathbf{H}}; \qquad (3)$$

$$\nabla\times\dot{\mathbf{H}}=j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\dot{\mathbf{E}}. \qquad (4)$$

В дальнейшем, для сокращения записи больше не будем использовать зависимости от координат.

После подстановки (1), (2) в (3), (4) преобразуем выражение с учетом следующего равенства известного из векторного анализа

$$\nabla\times(\psi\mathbf{F})=\nabla\psi\times\mathbf{F}+\psi\nabla\times\mathbf{F}. \qquad (5)$$

После этого перенесем дополнительные поля в правую часть, проделав это получим

$$\begin{gathered}\sum_w\sum_m\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}\left[\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{E}}_m^w\right]+\sum_w\sum_m\dot{A}_m^w\left[\nabla\times\dot{\mathbf{E}}_m^w\right]+\\ +j\omega\mu_0\sum_w\sum_m\dot{A}_m^w\dot{\mathbf{H}}_m^w=-\nabla\times\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}}-j\omega\mu_0\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}};\end{gathered} \qquad (6)$$

$$\begin{gathered}\sum_w\sum_m\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}\left[\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{H}}_m^w\right]+\sum_w\sum_m\dot{A}_m^w\left[\nabla\times\dot{\mathbf{H}}_m^w\right]-\\ -j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\sum_w\sum_m\dot{A}_m^w\dot{\mathbf{E}}_m^w=-\nabla\times\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}}+j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}},\end{gathered} \qquad (7)$$

где $\mathbf{k}$ — орт оси Z.

Обратим внимание на то, что в уравнениях (6), (7) последние две суммы в левой части можно объединить и, отделив диэлектрическую проницаемость волновода w, эти члены уравнений будут удовлетворять однородным уравнениям Максвелла для отдельного волновода. Это значит, что для подставленных решений уравнений они будут равны нулю и, сократив их, получим следующие уравнения

$$\sum_w\sum_m\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}\left[\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{E}}_m^w\right]=-\nabla\times\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}}-j\omega\mu_0\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}}; \qquad (8)$$

$$\begin{gathered}\sum_w\sum_m\left(\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}\left[\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{H}}_m^w\right]-j\omega\varepsilon_0\dot{A}_m^w\left(\varepsilon_r-\varepsilon_w\right)\dot{\mathbf{E}}_m^w\right)=\\ =-\nabla\times\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}}+j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}}.\end{gathered} \qquad (9)$$

Векторное произведение, стоящее под знаком суммы, в (8), (9), не имеет продольной компоненты. Если не учесть дополнительные поля, то уравнения становятся неверными. Используя этот факт, а также факт взаимной ортогональности мод и дополнительных полей, можно прийти к выражению для дополнительных полей через поля мод взаимодействующих волноводов. Для этого скалярно умножим (8), (9) на орт **k** и тем самым избавимся от компонентов векторного произведения под знаком суммы

$$\mathbf{k}\nabla\times\mathbf{E}_{\text{ort}} = -j\omega\mu_0\dot{H}_{\text{ort}Z}; \qquad (10)$$

$$\mathbf{k}\nabla\times\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}} = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z} + +j\omega\varepsilon_0\sum_w\sum_m\dot{A}_m^w\left(\varepsilon_r-\varepsilon_w\right)\dot{E}_{mZ}^w. \qquad (11)$$

Факт ортогональности дополнительных полей всем модам волноводов проистекает из нескольких соображений. Первым является то, что моды каждого волновода составляют полное гильбертово пространство. Вторым, — что мы не можем представить дополнительные поля в виде непрерывного спектра излучения, поскольку в таком случае было бы невозможно направленное распространение волн в системе с распределенной связью. Единственным вариантом остается ортогональность полному спектру волн каждого волновода в системе. С физической точки зрения, это означает, что они не должны переносить взаимной мощности через сечение волновода. Математически это определяется следующим образом:

$$\int_S\left(\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}}\times\mathbf{H}_m'^w+\mathbf{E}_m'^w\times\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}}\right)\mathbf{k}dS=0. \qquad (12)$$

Здесь штрихом обозначено комплексное сопряжение.

Умножим каждое слагаемое на **k** и учтем, что **kA**×**B** = –**Ak**×**B**. Выражение придет к виду

$$\int_S\mathbf{H}_m'^w\left(\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}}\right)-\mathbf{E}_m'^w\left(\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}}\right)dS=0. \qquad (13)$$

Поскольку моды $\left\{\mathbf{E}_m'^w,\mathbf{H}_m'^w\right\}$ представляют собой полное гильбертово пространство для каждого волновода w, то единственным способом решения этого уравнения будет способ приравнять векторные произведения к нулю. Отсюда получим, что ортогональные дополнительные поля могут быть только продольными

$$\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}}=0;\quad \mathbf{k}\times\dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}}=0; \qquad (14)$$

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}}=\dot{E}_{\text{ort}Z}\mathbf{k};\quad \dot{\mathbf{H}}_{\text{ort}}=\dot{H}_{\text{ort}Z}\mathbf{k}. \qquad (15)$$

Вернемся к уравнениям (10), (11) и увидим, что левая часть обращается в нуль. Таким образом, после преобразований имеем следующие выражения для ортогональных полей

$$\dot{E}_{\text{ort}Z}=-\sum_w\sum_m\frac{\left(\varepsilon_r-\varepsilon_w\right)}{\varepsilon_r}\dot{A}_m^w\dot{E}_m^w; \qquad (16)$$

$$\dot{H}_{\text{ort}Z}=0. \qquad (17)$$

Подставив результаты в (8), (9), получим

$$\sum_w\sum_m\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}\left[\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{E}}_m^w\right]=-\nabla\times\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}; \qquad (18)$$

$$\sum_w\sum_m\left(\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}\left[\mathbf{k}\times\dot{\mathbf{H}}_m^w\right]-j\omega\varepsilon_0\dot{A}_m^w\left(\varepsilon_r-\varepsilon_w\right)\dot{\mathbf{E}}_m^w\right)= = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}. \qquad (19)$$

Для того чтобы избавиться от векторного представления уравнений и перейти к нормам и взаимным нормам взаимодействующих мод, проведем процедуру аналогичную той, которая выполняется при выводе сопряженной теоремы Лоренца или теоремы Пойнтинга. Умножим скалярно первое уравнение на $\mathbf{H}'^v_n$, а второе на $\mathbf{E}'^v_n$ и вычтем из первого второе. Индексы v и n независимо пробегают те же значения, что w и m. После этого преобразуем выражение с использованием формулы ∇[**A**×**B**] = **B**[∇×**A**] – **A**[∇×**B**] к виду

$$\sum_w\sum_m\left(\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}\left(\left[\dot{\mathbf{E}}_m^w\times\dot{\mathbf{H}}_n^v\right]+\left[\dot{\mathbf{E}}_n^v\times\dot{\mathbf{H}}_m^w\right]\right)\mathbf{k}+ +j\omega\varepsilon_0\dot{A}_m^w\left(\varepsilon_r-\varepsilon_w\right)\left[\dot{\mathbf{E}}_m^w\times\dot{\mathbf{H}}_n^v\right]\right)= =-\nabla\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}\times\dot{\mathbf{H}}_n^v-\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}\nabla\times\dot{\mathbf{H}}_n^v-j\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}\dot{\mathbf{E}}_n^v. \qquad (20)$$

Вынесем $\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}$ в правой части уравнения у двух последних слагаемых за скобки и увидим, что полученное в скобках выражение почти соответствует однородному уравнению для ротора $\mathbf{H}'^v_n$. Дополним его до однородного уравнения и сократим

$$\sum_w\sum_m\left(\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}\left(\left[\dot{\mathbf{E}}_m^w\times\dot{\mathbf{H}}_n^v\right]+\left[\dot{\mathbf{E}}_n^v\times\dot{\mathbf{H}}_m^w\right]\right)\mathbf{k}+ +j\omega\varepsilon_0\dot{A}_m^w\left(\varepsilon_r-\varepsilon_w\right)\dot{\mathbf{E}}_m^w\dot{\mathbf{E}}_n^v\right)= =-\nabla\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}\times\dot{\mathbf{H}}_n^v-j\omega\varepsilon_0\left(\varepsilon_r-\varepsilon_v\right)\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}\dot{\mathbf{E}}_n^v. \qquad (21)$$

Финальный этап вывода — интегрирование по поперечному сечению системы. Введем следующие обозначения:

$$N_{mn}^{wv}=\int_S\left(\left[\dot{\mathbf{E}}_m^w\times\dot{\mathbf{H}}_n^v\right]+\left[\dot{\mathbf{E}}_n^v\times\dot{\mathbf{H}}_m^w\right]\right)\mathbf{k}dS; \qquad (22)$$

$$K_{mn}^{wv}=j\omega\varepsilon_0\int_S\left(\varepsilon_r-\varepsilon_w\right)\dot{\mathbf{E}}_m^w\dot{\mathbf{E}}_n^v dS; \qquad (23)$$

$$\sum_w\sum_m\left(\frac{d\dot{A}_m^w}{dz}N_{mn}^{wv}+\dot{A}_m^wK_{mn}^{wv}\right)= =-\int_S\nabla\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}\times\dot{\mathbf{H}}_n^v dS- -j\omega\varepsilon_0\int_S\left(\varepsilon_r-\varepsilon_v\right)\dot{\mathbf{E}}_{\text{ort}Z}\dot{\mathbf{E}}_n^v dS. \qquad (24)$$

Преобразуем правую часть уравнения с учетом (16) и введем отдельные коэффициенты для этих членов уравнения. Если для последнего слагаемого в уравнении все тривиально, то первое слагаемое в правой части (24) требует дополнительного анализа.

Используя формулу Гаусса – Остроградского получим следующее:

$$\int_S \nabla \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{ortZ}} \times \dot{\mathbf{H}}_n^v dS = \oint_L \mathbf{n}_L \left[\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{ortZ}} \times \dot{\mathbf{H}}_n^v \right] dL + \frac{d}{dz} \int_S \mathbf{k} \left[\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{ortZ}} \times \dot{\mathbf{H}}_n^v \right] dS. \tag{25}$$

Поскольку векторное произведение в последнем интеграле (25) имеет только компоненты в поперечном сечении волновода, то этот интеграл всегда равен нулю. От формулы остается только интеграл по замкнутому контуру L вокруг поперечного сечения S w-го волновода. Полагая, что контур был ориентирован так, чтоб образовывать с вектором $\mathbf{k}$ правый вихрь получим, что $[\mathbf{n}_L \times \mathbf{k}] = -\boldsymbol{\tau}_L$, где $\boldsymbol{\tau}_L$ — тангенциальный вектор к контуру.

$$\begin{gathered} \oint_L \mathbf{n}_L \left[\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{ortZ}} \times \dot{\mathbf{H}}_n^v \right] dL \to \oint_L \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{ortZ}} \dot{\mathbf{H}}_n^v \left[\mathbf{n}_L \times \mathbf{k} \right] dL \to \\ \to -\oint_L \dot{E}_{\mathrm{ortZ}} \dot{\mathbf{H}}_n^v d\mathbf{L} \to \sum_w \sum_m \dot{A}_m^w \oint_L \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_w)}{\varepsilon_r} \times \\ \times \dot{E}_{mZ}^w \dot{\mathbf{H}}_n^v d\mathbf{L} \to \sum_w \sum_m A_m^w S_{mn}^{wv}; \\ S_{mn}^{wv} = \oint_L \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_w)}{\varepsilon_r} \dot{E}_{mZ}^w \dot{\mathbf{H}}_n^v d\mathbf{L}. \end{gathered} \tag{26}$$

Функция относительного диэлектрического возмущения $(\varepsilon_r - \varepsilon_w)/\varepsilon_r$ обращается в нуль везде кроме областей, где расположены волноводы, исключая волновод w (рис. 2).

Мы не можем считать контурный интеграл (26) равным нулю, не смотря на то что он проходит по области с нулевым значением функции диэлектрического возмущения $\varepsilon_r - \varepsilon_w$. Поскольку сечение, вокруг которого берется контурный интеграл, является бесконечным, то оно будет включать в себя все области возмущения диэлектрической проницаемости. Это значит, что область не будет односвязной, тогда контурный интеграл можно свести к контурным интегралам вокруг областей диэлектрических возмущений. В результате нужно взять циркуляцию только вокруг областей диэлектрических возмущений, но с обратным ходом по внутренним контурам, относительно внешнего контура.

Интеграл по совокупному контуру $L + \mathfrak{L}$ на рис. 3 будет равен нулю, поскольку область внутри него является односвязной и функция под интегралом всюду равна нулю. Интегралы по разрезам компенсируются, тогда очевидно, что

$$\oint_L \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_w)}{\varepsilon_r} \dot{E}_{mZ}^w \dot{\mathbf{H}}_n^v d\mathbf{L} + \oint_{\mathfrak{L}} \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_w)}{\varepsilon_r} \dot{E}_{mZ}^w \dot{\mathbf{H}}_n^v d\mathfrak{L} = 0.$$

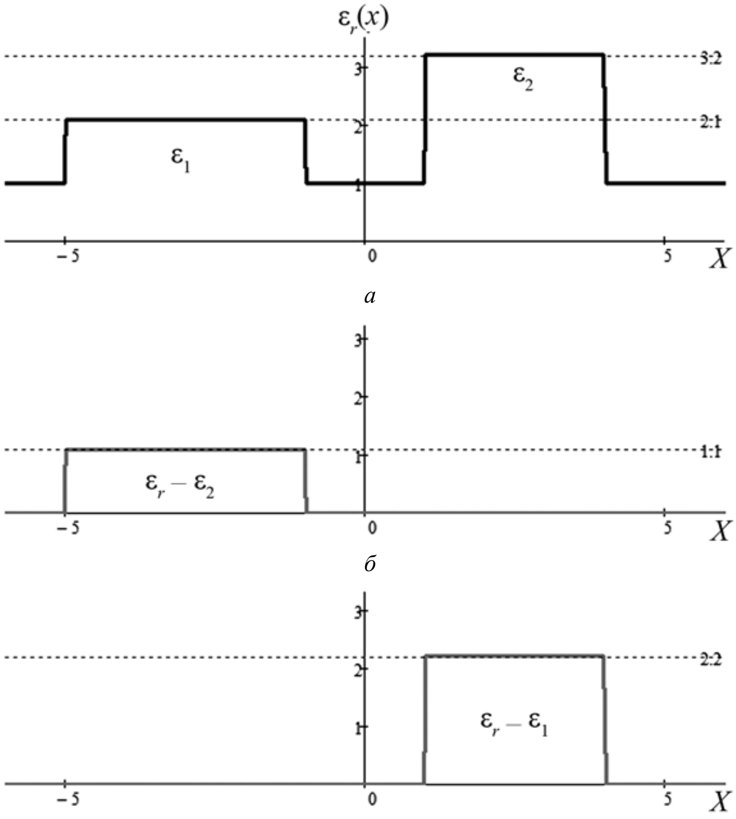

Рис. 2. Определение функций диэлектрического возмущения $\varepsilon_r - \varepsilon_w$ на примере двух волноводов: *а* — функция распределения диэлектрической проницаемости ε_r; *б* — функция диэлектрического возмущения для волновода с ε_2; *в* — функция диэлектрического возмущения для волновода с ε_1

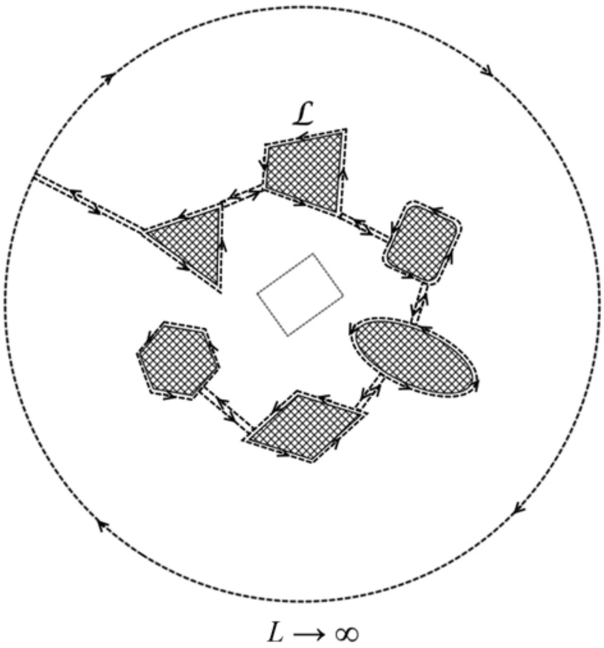

Рис. 3. Вычисление контурного интеграла

После преобразования контура получим итоговое выражение

$$S_{mn}^{wv} = -\oint_{\mathfrak{L}} \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_w)}{\varepsilon_r} \dot{E}_{mZ}^{w} \dot{\mathbf{H}}_n^v d\mathfrak{L} \,. \tag{27}$$

Данное выражение представляет собой дополнительный коэффициент поверхностной связи. Контур $\mathfrak{L}$ объединяет все внутренние границы областей диэлектрических возмущений.

Дополнительный коэффициент объемной связи равен

$$\begin{gathered} j\omega\varepsilon_0 \int_S (\varepsilon_r - \varepsilon_v) \dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{ort}Z} \dot{\mathbf{E}}_n^v dS \rightarrow \\ \rightarrow -\sum_w \sum_m \dot{A}_m^w j\omega\varepsilon_0 \int_S \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_v)(\varepsilon_r - \varepsilon_w)}{\varepsilon_r} \dot{E}_{mZ}^w \dot{E}_{nZ}^v dS \rightarrow \\ \rightarrow -\sum_w \sum_m \dot{A}_m^w V_{mn}^{wv}; \\ V_{mn}^{wv} = j\omega\varepsilon_0 \int_S \frac{(\varepsilon_r - \varepsilon_w)(\varepsilon_r - \varepsilon_v)}{\varepsilon_r} \dot{E}_{mZ}^w \dot{E}_{nZ}^v dS. \end{gathered} \tag{28}$$

После всех замен получим

$$\begin{gathered} \sum_w \sum_m \left(\frac{d\dot{A}_m^w}{dz} N_{mn}^{wv} + \dot{A}_m^w K_{mn}^{wv} \right) = \\ = \sum_w \sum_m \dot{A}_m^w \left(V_{mn}^{wv} - S_{mn}^{wv} \right). \end{gathered} \tag{29}$$

Уравнение (29) также может быть приведено к классическому виду, если вынести из коэффициентов связи множители бегущей волны, а также разделить каждое уравнение на норму соответствующей моды. Из-за тривиальности и необязательности этой процедуры этот этап можно опустить.

Таким образом, полученное уравнение описывает решение задачи распределенной связи диэлектрических волноводов как в обыкновенной, так и модифицированной формулировках. Для обыкновенной формулировки правая часть уравнения (29) будет равна нулю.

Для определения зависимостей комплексных амплитуд мод уравнение надо привести к матричному виду. Первый столбец индексов $\{w, m\}$ определяет количество столбцов матрицы, а второй столбец индексов $\{v, n\}$ — количество строк. Объединенные коэффициенты связи дадут матрицу $\hat{\mathbf{K}}$, а матрицу взаимных норм запишем как $\mathbf{N}$. Нельзя забывать неявно содержащийся в каждом элементе матриц множитель $e^{-jk_{\mathrm{mn}}^{\mathrm{wv}} z}$, определяемый разностью фазовых скоростей мод. Таким образом, имеем однородную систему дифференциальных уравнений, которую можно решить численными методами или аналитически.

$$\frac{d\dot{\mathbf{A}}}{dz} = -\mathbf{N}^{-1} \hat{\mathbf{K}} \dot{\mathbf{A}} \,. \tag{30}$$

Очевидно, что по форме, но не по содержанию, уравнение (30) аналогично получаемому из обыкновенной теории связанных мод. В связи с этим по форме решения обыкновенная теория совпадает с модифицированной.

Расчет коэффициентов связи — крайне трудоемкая задача. Для их получения требуется точно знать аналитические выражения для мод диэлектрических волноводов, что возможно в нескольких частных случаях. В связи с этим неизбежна погрешность при попытке анализа с использованием любой из формулировок теории распределенной связи. Учитывая то, что неортогональная формулировка до сих пор мало распространена, анализ уровня ошибки, вносимой игнорированием дополнительных коэффициентов связи, представляет большой научный и практический интерес. Более того, нигде не найдена информация о характере зависимостей дополнительных коэффициентов связи для различных комбинаций параметров участка связи и параметров самих волноводов.

Авторы планируют провести эти исследования для некоторых обликов участков связи и сравнить теоретические и практические результаты, а также оценить уровень влияния дополнительных коэффициентов связи.

Литература

1. **Миллер С.** Теория связанных волн и ее применение к волноводам // Волноводные линии передач с малыми потерями. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. С. 139.

2. **Truong C. D. e. a.** A Broadband Second-order Mode Synthesizer Based on an 3×1 Multimode Interference Coupler and Phase Shifters Using Silicon Waveguides // IEEE 6 Intern. Conf. Communications and Electronics. 2016. Pp. 397—402.

3. **Ahmed R. e. a.** Multimode Waveguide Based Directional Coupler // Optics Communications. 2016. V. 370. Pp. 183—191.

4. **Shalaby H.M.H.** Bi-directional Coupler as a Mode-division Multiplexer/Demultiplexer // J. Lightwave Techn. 2016. V. 34. No. 15. Pp. 3633—3640.

5. **Dai D., Wang J., Shi Y.** Silicon Mode (De) Multiplexer Enabling High Capacity Photonic Networks-on-chip with a Single-Wavelength-Carrier Light // Optics Lett. 2013. V. 38. No. 9. Pp. 1422—1424.

6. **Luo Y. e. a.** Integrated Dual-mode 3 dB Power Coupler Based on Tapered Directional Coupler // Sci. Rep. 2016. V. 6. Pp. 23516.

7. **Zhao W.K. e. a.** Horizontal Directional Coupler Formed with Waveguides of Different Heights for Mode-division Multiplexing // IEEE Photonics J. 2017. V. 9. No. 5. Pp. 1—9.

8. **Zhang K., Li D.** Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics.Springer Sci. & Business Media, 2013.

9. **Little B.E., Huang W.P.** Coupled-mode Theory for Optical Waveguides // Progress in Electromagnetics Research. 1995. V. 10. Pp. 217—270.

10. **Pease M.C.** Generalized Coupled Mode Theory // J. Appl. Phys. 1961. V. 32. No. 9. Pp. 1736—1743.

11. **Yariv A.** Coupled-mode Theory for Guided-wave Optics // IEEE J. of Quantum Electronics. 1973. V. 9. No. 9. Pp. 919—933.

12. **Hardy A., Streifer W.** Coupled Mode Theory of Parallel Waveguides // J. Lightwave Technology. 1985. V. 3. No. 5. Pp. 1135—1146.

13. **Ohke T., Tomabechi Y., Matsumura K.** Coupled Mode Theory of Parallel Multi- and Single-mode Dielectric Waveguide // Electronics and Communications in Japan (Pt. II. Electronics). 1989. V. 72. No. 2. Pp. 91—100.

14. **Барыбин А.** Электродинамика волноведущих структур. Теория возбуждения и связи волн. М: Физматлит, 2007.

References

1. **Miller S**. Teoriya svyazannykh Voln i ee Primenenie k Volnovodam. Volnovodnye Linii Peredach s Malymi Poteryami. M.: Izd-vo Inostr. Lit-ry, 1960. (in Russian).

2. **Truong C. D. e. a.** A Broadband Second-order Mode Synthesizer Based on an 3×1 Multimode Interference Coupler and Phase Shifters Using Silicon Waveguides. IEEE 6 Intern. Conf. Communications and Electronics. 2016:397—402.

3. **Ahmed R. e. a.** Multimode Waveguide Based Directional Coupler. Optics Communications. 2016;370: 183—191.

4. **Shalaby H.M.H.** Bi-directional Coupler as a Mode-division Multiplexer/Demultiplexer. J. Lightwave Techn. 2016;34;15:3633—3640.

5. **Dai D., Wang J., Shi Y.** Silicon Mode (De) Multiplexer Enabling High Capacity Photonic Networks-on-chip With A Single-Wavelength-Carrier Light. Optics Letters. 2013;38; 9:1422—1424.

6. **Luo Y. e. a.** Integrated Dual-mode 3 dB Power Coupler Based on Tapered Directional Coupler. Sci. Rep. 2016;6:23516.

7. **Zhao W.K. e. a.** Horizontal Directional Coupler Formed with Waveguides of Different Heights for Mode-division Multiplexing. IEEE Photonics J. 2017;9;5:1—9.

8. **Zhang K., Li D.** Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics.Springer Sci. & Business Media, 2013.

9. **Little B.E., Huang W.P.** Coupled-mode Theory for Optical Waveguides. Progress in Electromagnetics Research. 1995;10:217—270.

10. **Pease M.C.** Generalized Coupled Mode Theory. J. Appl. Phys. 1961;32;9:1736—1743.

11. **Yariv A.** Coupled-mode Theory for Guided-wave Optics. IEEE J. of Quantum Electronics. 1973;9; 9:919—933.

12. **Hardy A., Streifer W.** Coupled Mode Theory of Parallel Waveguides. J. Lightwave Technology. 1985;3;5:1135—1146.

13. **Ohke T., Tomabechi Y., Matsumura K.** Coupled Mode Theory of Parallel Multi- and Single-mode Dielectric Waveguide. Electronics and Communications in Japan (Pt. II. Electronics). 1989;72;2:91—100.

14. **Barybin A.** Elektrodinamika Volnovedushchikh Struktur. Teoriya Vozbuzhdeniya i Svyazi Voln. M: Fizmatlit, 2007. (in Russian).

Сведения об авторах

Андреев Андрей Сергеевич — аспирант кафедры основ радиотехники НИУ «МЭИ», e-mail: andreevans@inbox.ru

Крутских Владислав Викторович — кандидат технических наук, доцент кафедры основ радиотехники НИУ «МЭИ», e-mail: KrutskikhVV@mpei.ru

Information about authors

Andreev Andrey S. — Ph.D.-student of Fundamentals of Radio Engineering Dept., NRU MPEI, e-mail: andreevans@inbox.ru

Krutskikh Vladislav V. — Ph.D. (Techn.), Assistant Professor of Fundamentals of Radio Engineering Dept., NRU MPEI, e-mail: KrutskikhVV@mpei.ru

Статья поступила в редакцию 31.01.2017