МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 517.95
DOI: 10.24160/1993-6982-2019-6-131-137

Регуляризация интегральных операторов в сингулярно возмущенных задачах с помощью нормальных форм

А.А. Бободжанов, В.Ф. Сафонов

При обобщении метода регуляризации С.А. Ломова на интегральные и интегро-дифференциальные сингулярно возмущенные задачи основная трудность заключается в регуляризации интегральных операторов. В случае отсутствия интегральных операторов, т. е. при наличии только дифференциального оператора регуляризация соответствующей сингулярно возмущенной задачи проводится обычно по спектру предельного оператора с помощью известной формулы сложного дифференцирования. Для интегральных операторов аналога формулы сложного дифференцирования нет, поэтому напрямую построить расширение интегрального оператора не представляется возможным. Обобщая идеи С.А. Ломова, в одной из работ для дифференциальных систем была развита регуляризация с помощью нормальных форм. При ней дополнительные (регуляризирующие) переменные вводятся не непосредственно по спектру предельного оператора, а вычисляются опосредовано с помощью некоторой нормальной дифференциальной формы, решение которой записывается в квадратурах. В случае ненулевых точек простого спектра предельного оператора подобная регуляризация совпадает с регуляризацией по спектру, развитой С.А. Ломовым. Однако при наличии собственных значений предельного оператора, обращающихся в нуль хотя бы в одной точке рассматриваемого промежутка времени, классическая регуляризация С.А. Ломова не позволяет построить расширение интегрального оператора и провести его полную регуляризацию. Применение регуляризации с помощью нормальных форм позволило полностью снять эту проблему.
На примере простейшей интегродифференциальной задачи с нестабильностью спектра на континуальном множестве продемонстрированы основные идеи метода нормальных форм и приведено утверждение, с помощью которого проходит регуляризация интегральных операторов. Выписывается главный член асимптотики решения этой задачи, после изучения которого можно сделать вывод о наличии двух слоев в решении: пограничного в окрестности начальной точки рассматриваемого промежутка времени и внутреннего переходного (контрастной структуры) в окрестности конечной точки множества нестабильности.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный, интегро-дифференциальные уравнения, регуляризация интеграла.

Для цитирования: Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф. Регуляризация интегральных операторов в сингулярно возмущенных задачах с помощью нормальных форм / Вестник МЭИ. 2019. № 6. С. 131—137. DOI: 10.24160/1993-6982-2019-6-131-137.

Regularization of Integral Operators in Singularly Perturbed Problems Using Normal Forms

A.A. Bobodzhanov. V.F. Safonov

The main difficulty encountered in generalizing S.A. Lomov's regularization method for integral and integro-differential singularly perturbed problems lies in bringing integral operators to a regular kind. If there are no integral operators, that is, if there is only a differential operator, the corresponding singularly perturbed problem is usually regularized by the spectrum of the limit operator using the well-known formula of complex differentiation. For integral operators, there is no an analog of the complex differentiation formula; therefore, it is not possible to directly construct an extension of the integral operator. In one of the authors' works that was addressed to generalization of S.A. Lomov's ideas, a regularization

method for differential systems with the use of normal forms was developed. With such regularization, additional (regularizing) variables are not entered directly from the limit operator spectrum, but are indirectly calculated using some normal differential form, the solution of which is written in quadratures. In the case of nonzero points of the limit operator's simple spectrum, such regularization coincides with the regularization along the spectrum developed by S.A. Lomov. However, if there are eigenvalues of the limit operator that vanish in at least one point of the considered time interval, S.A. Lomov's classical regularization does not make it possible to construct an extension of an integral operator and carry out its full regularization. This difficulty has been fully eliminated by applying regularization with the use of normal forms.
The basic ideas of the method of normal forms have been demonstrated taking as an example the simplest integro-differential problem with spectrum instability on a continual set, and the statement using which integral operators are regularized is given. The main term of the problem solution asymptotics is written, after studying of which a conclusion is drawn about the presence of two layers in the solution: the boundary layer in the neighborhood of the initial point of the considered time interval and the inner transition layer (a contrast structure) in the neighborhood of the instability set end point.

Key words: singularly perturbed, integro-differential equations, regularization of an integral.

For citation: Bobodzhanov A.A.. Safonov V.F. Regularization of Integral Operators in Singularly Perturbed Problems Using Normal Forms. Bulletin of MPEI. 2019;6:131—137. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2019-6-131-137.

В одной из работ [1] подчеркивалось, что при обобщении метода регуляризации С.А. Ломова [2, 3] на интегральные и интегродифференциальные сингулярно возмущенные задачи (СВЗ) типа

$$\varepsilon\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt}=A(t)y(t,\varepsilon)+$$
$$+\int_0^{\alpha}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta}K(t,s)y(s,\varepsilon)ds+h(t,x); \qquad (1)$$
$$y(0,\varepsilon)=y^0\left(\begin{matrix}t\in[0,T],(\alpha=t\vee\alpha=T),\\ T<+\infty,\mu(t)\le 0\end{matrix}\right);$$

$$\varepsilon y(t,\varepsilon)=\int_0^t K(t,s)y(s,\varepsilon)ds+h(t); \qquad (1a)$$

$$\varepsilon\frac{\partial y(t,x,\varepsilon)}{\partial t}=A(t)y(s,x,\varepsilon)+$$
$$+h(t,x)+\int_0^t K(t,s)y(s,x,\varepsilon)ds+ \qquad (1b)$$
$$+\int_0^x\int_0^t Q(t,x,s,v)y(s,v,\varepsilon)dsdv,$$
$$\left((t,x)\in[0,T]\times[0,X]\right).$$

основная трудность заключается в регуляризации интегральных операторов. В случае отсутствия интегральных операторов, т. е. при наличии только дифференциального оператора $L_\varepsilon\equiv\varepsilon\frac{d}{dt}-A(t)$, регуляризация соответствующей СВЗ производится обычно по спектру $\{\lambda_j(t)\}$ предельного оператора $A(t)$ с помощью известной формулы сложного дифференцирования. При этом расширенный оператор в (1) и (1*b*) имеет вид

$$\tilde{L}_\varepsilon\equiv\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sum\nolimits_{j=1}^n\lambda_j(t)\frac{\partial}{\partial\tau_j}-A(t)$$

(в интегральной системе (1*a*) роль оператора $A(t)$ играет диагональное ядро $K(t, t)$). Для интегральных операторов аналога формулы сложного дифференцирования нет, поэтому напрямую построить расширение интегрального оператора не представляется возможным. Применяя (в случае $\lambda_i(t)\neq 0\forall t\in[0,T], i=\overline{1,n}$) операцию интегрирования по частям к интегралу

$$Jy(t,\tau)=\int_0^t K(t,s)y(s,\psi(s,\varepsilon))ds\times$$
$$\times\left(\psi_j(t,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_j(\theta)d\theta,\ j=\overline{1,n}\right)$$

от каждого элемента $y(t, \tau)$ пространства

$$U=\{y(t,\tau)=\sum_{j=1}^n y_j(t)e^{\tau_j}+$$
$$+y_0(t),y_j(t)\in C^\infty([0,T],C^n)\},$$

используемого в дифференциальных системах, С.А. Ломов приходит к выводу, что в качестве пространства, инвариантного относительно интегрального оператора [2, с. 62], можно взять пространство $M_\varepsilon=U|_{\tau=\psi(t,\varepsilon)}$ при условии, что образ $Jy(t, \tau)$ каждого его элемента $y(t, \tau)$ представляется асимптотическим степенным рядом по ε, равномерно сходящимся по $t\in[0, T]$. В случае $\lambda_i(t)\neq 0\forall t\in[0,T],\ i=\overline{1,n}$ это так, поэтому в качестве пространства, инвариантного относительно интегрального оператора возможно взять M_ε. При этом расширение $\tilde{J}$ интегрального оператора J будет определено на множестве асимптотических рядов $y(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^\infty\varepsilon^k y_k(t,\tau)$ с коэффициентами $y_k(t, \tau)\in U$, а сам оператор $\tilde{J}$ имеет довольно сложную структуру:

$$\tilde{J}\tilde{y}(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{\nu=0}^\infty\varepsilon^\nu\sum_{r=0}^\nu R_{\nu-r}y_r(t,\tau),$$

где $R_m: U\to U$ — операторы порядка по ε:

$$R_0y(t,\tau)\equiv R_0\left(\sum_{j=1}^n y_j(t)e^{\tau_j}+y_0(t)\right)=\int_0^t K(t,s)y_0(s)ds;$$

$$R_my(t,\tau)=(-1)^m\varepsilon^{m+1}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^n\left[\begin{matrix}\left(I_j^m\left(K(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=t}e^{\tau_j}-\\ -\left(I_j^m\left(K(t,s)y_j(s)\right)\right)_{s=0}\end{matrix}\right];$$

$$I_j^0=\frac{1}{\lambda_j(s)};\quad I_j^m=\frac{1}{\lambda_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_j^{m-1},\quad m\ge 1.$$

Запишем задачу, полностью регуляризованную по отношению к исходной (1):

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(t)\frac{\partial\tilde{y}}{\partial\tau_j}-A(t)\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y}=h(t),\ y(0,0,\varepsilon)=y^0.$$

и приступим к построению регуляризованного асимптотического решения задачи (1).

Если же хотя бы одно из собственных значений обращается в нуль на отрезке [0, T] (например, если $\lambda_1(t)=-t^k l_0(t), l_0(t)>0\,\forall t\in[0,T]$), то при регуляризации по спектру $\tau_j=\psi_j(t,\varepsilon)\left(j=\overline{1,n}\right)$ описанное выше пространство M_ε не является пространством, инвариантным относительно интегрального оператора, так как в этом случае операция интегрирования по частям не работает, и поэтому невозможно получить разложение интеграла $Jy(t, \tau)$ в виде асимптотического ряда по степеням ε. Значит следует изменить саму процедуру регуляризации. Обобщая идеи С.А. Ломова, в [1] развита регуляризация с помощью нормальных форм. При ней дополнительные (регуляризирующие) переменные вводятся не непосредственно по спектру предельного оператора $A(t)$, а вычисляются опосредованно с помощью дифференциальной нормальной формы:

$$\varepsilon\frac{du_1}{dt}=\lambda_1(t)u_1+\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r g_r(t),\ u_1(0,\varepsilon)=1;$$
$$\varepsilon\frac{du_j}{dt}=\lambda_j(t)u_j,\ u_j(0,\varepsilon)=1,\ j=\overline{2,n},$$

где функции $g_r(t)$ вычисляются в процессе построения асимптотического решения исходной задачи (1). Решение этой формы записывается в квадратурах. Процедура регуляризации интегрального оператора в этом случае основана на следующем утверждении.

Лемма. *Пусть функции* $a(t)$, $\mu(t)\in C[0, T]$ *таковы, что* $a(t)\neq\mu(t)\,\forall t\in[0, T]$, *и функция* $g(t, \varepsilon)$ *непрерывна по* $t\in[0, T]$ *при каждом* $\varepsilon>0$. *Если функция* $u=u_1(t, \varepsilon)$ *является решением уравнения* $\varepsilon\dot{u}=a(t)u+g(t,\varepsilon)$, *то при любых* $t\in[0, T]$ *и* $\varepsilon>0$ *имеет место равенство*

$$u_1(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{a(t)-\mu(t)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta\right)\frac{d}{dt}\times$$
$$\times\left[\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta\right)u_1(t,\varepsilon)\right]-\frac{g(t,\varepsilon)}{a(t)-\mu(t)}.$$

Доказательство вытекает из цепочки равенств:

$$\frac{d}{dt}u_1(t)=\frac{u_1(t)a(t)+g(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\Leftrightarrow\frac{d}{dt}u_1(t)=$$
$$=-\frac{u_1(t)\left(-a(t)+\mu(t)\right)-u_1(t)\mu(t)-g(t,\varepsilon)}{\varepsilon}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u_1(t)=\frac{u_1(t)\mu(t)-\left(\frac{d}{dt}u_1(t)\right)\varepsilon+g(t,\varepsilon)}{-a(t)+\mu(t)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1(t)=\frac{\varepsilon e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)\,d\theta}\left(-\frac{\mu(t)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)\,d\theta}u_1(t)}{\varepsilon}+e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)\,d\theta}\left(\frac{d}{dt}u_1(t)\right)\right)}{a(t)-\mu(t)}-$$
$$-\frac{g(t,\varepsilon)}{a(t)-\mu(t)}\Leftrightarrow u_1(t)=\frac{\varepsilon}{a(t)-\mu(t)}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta}\times$$
$$\times\frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta}u_1(t)\right)-\frac{g(t,\varepsilon)}{a(t)-\mu(t)}.$$

Применение этой леммы позволило провести полную регуляризацию интегральных операторов и построить регуляризованное асимптотическое решение даже в случае континуальной нестабильности спектра или спектрального значения интегрального оператора, например, в задаче [4]

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=a(t)y+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_0(\theta)d\theta\right)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds+$$
$$+p(t)\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_1(\theta)d\theta\right)q(s)y(s,\varepsilon)ds+h(t);$$
$$y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in[0,T]$$

с быстро изменяющимися ядрами, одно из которых имеет нестабильное спектральное значение ($\mu_1(t)\equiv 0$ на множестве $S\subset[0, T]$).

Чтобы прояснить ситуацию с применением леммы, рассмотрим простейшую сингулярно возмущенную задачу

$$\begin{aligned}&\varepsilon\frac{dy}{dt}=a(t)y+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)\times\\&\times K(t,s)y(s,\varepsilon)ds+\\&+\varepsilon h(t),\ y(0,\varepsilon)=y^0,\ t\in[0,T]\end{aligned}\qquad(2)$$

при следующих предположениях:

1. $a(t),\mu(t),h(t)\in C^\infty[0,T];\ K(t,s)\in C^\infty\ (0\le s\le t\le T)$.
2. $a(t)\equiv 0\,\forall t\in S\ (S\subset[0,T]);\ a(t)<0\,\forall t\in[0,T]/S$.
3. $\mu(t)<0,\ \mu(t)\neq a(t)\,\forall t\in[0,T]$.

Введем вектор $u=\{u_1(t,\varepsilon),u_2(t,\varepsilon)\}$, удовлетворяющий нормальной форме

$$\begin{aligned}&\varepsilon\dot{u}_1=a(t)u_1+\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r g_r(t),\ u_1(0,\varepsilon)=1;\\&\varepsilon\dot{u}_2=\mu(t)u_2,\ u_2(0,\varepsilon)=1,\end{aligned}\qquad(3)$$

где функции $g_j(t)$ пока не известны и вычисляются в процессе построения асимптотического решения задачи (2).

Для функции $\tilde{y}=\tilde{y}(t,u,\varepsilon)$ такой, что $\tilde{y}(t,u(t,\varepsilon),\varepsilon)\equiv y(t,\varepsilon)$ (где $u=u(t, \varepsilon)$ — решение нормальной формы (3),

$y = u(t, \varepsilon)$ — точное решение задачи (2)) естественно поставить следующую задачу:

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{y}}{\partial u_1}(a(t)u_1+\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r g_r(t))+\frac{\partial\tilde{y}}{\partial u_2}\mu(t)u_2=a(t)\tilde{y}+$$
$$+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)\tilde{y}(s,u(s,\varepsilon),\varepsilon)ds+\varepsilon h(t), \tag{4}$$
$$\tilde{y}(0,\overline{1},\varepsilon)=y^0,$$

где $\overline{1}=\{1, 1\}$.

Задачу (4) нельзя считать регуляризованной, поскольку в ней не проведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{y}(t,u(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)\tilde{y}(s,u(s,\varepsilon),\varepsilon)ds.$$

Для его регуляризации надо построить пространство M_ε, асимптотически инвариантное относительно интегрального оператора J.

Определение. Пусть вектор-функция $y(t, u)$ принадлежит пространству U, если она представима суммой

$$y(t,u)=y_1(t)u_1+y_2(t)u_2+y_0(t), \tag{5}$$

в которой коэффициенты $y_j(t)\in C^\infty[0,T]$, $j=0,\ 1,\ 2$.

В качестве класса M_ε возьмем пространство $U|_{u=u(t,\varepsilon)}$, где $u = u(t, \varepsilon)$ — решение нормальной формы (3). Чтобы показать инвариантность пространства M_ε относительно оператора J, надо обосновать, что его образ $Jy(t, \varepsilon)$ на элементе пространства U представим в виде степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(z_1^{(k)}(t)u_1(t,\varepsilon)+z_2^{(k)}(t)u_2(t,\varepsilon)+z_0^{(k)}(t)),$$

асимптотически сходящегося (при $\varepsilon \to +0$ равномерно при $t \in [0, T]$.

На функциях (5) пространства $y(t, u) \in U$ оператор J имеет вид:

$$Jy(t,\tau)=\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_0(s)ds+$$
$$+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_1(s)u_1(s,\varepsilon)ds+$$
$$+\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta+\int_0^s\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_2(s)ds$$

(учтено, что $u_2(t,\varepsilon)=\exp\left(\int_0^t\mu(\theta)d\theta\right)$ согласно (3)).

Разложим каждый из стоящих интегралов в асимптотические ряды. Для последнего интеграла этого делать не надо, так как он представлен в виде элемента класса M_ε:

$$J_2(t,\varepsilon)\equiv\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta+\int_0^s\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_2(s)ds=$$
$$=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta\right)\int_0^t K(t,s)y_2(s)ds=u_2(t,\varepsilon)\int_0^t K(t,s)y_2(s)ds. \tag{6}$$

К первому интегралу применим классическую операцию интегрирования по частям и получим разложение (см. [1]) :

$$J_0(t,\varepsilon)\equiv\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_0(s)ds=$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}\left[\begin{array}{l}(I_0^m(K(t,s)y_0(s)))_{s=0}\times\\ \times\exp(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta)-(I_0^m(K(t,s)y_0(s)))_{s=t}\end{array}\right], \tag{7}$$

где $I_0^0=\dfrac{1}{\mu(s)}$; $I_0^m=\dfrac{1}{\mu(s)}\dfrac{\partial}{\partial s}I_0^{m-1}$, $m\geq 1$.

Нетрудно показать, что полученный ряд сходится асимптотически (при $\varepsilon \to +0$ к интегралу $J_0(t, \varepsilon)$ равномерно по $t \in [0, T]$). Труднее обстоит дело с интегралом

$$J_1(t,\varepsilon)=\int_0^t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y_1(s)u_1(s,\varepsilon)ds.$$

Несмотря на то, что $u_1(t, \varepsilon)$ (согласно (3)) имеет вид

$$u_1(t,\varepsilon)=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t a(\theta)d\theta\right)\times$$
$$\times\left[1+\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^{r-1}\left(\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta\right)g_r(s)ds\right)\right],$$

стоящий здесь интеграл $\int_0^t\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s a(\theta)d\theta\right)g_r(s)ds$ нельзя с помощью интегрирования по частям разложить в ряд по степеням ε, так как $a(t) \equiv 0$ при $t \in S$. Воспользуемся леммой для получения асимптотического разложения по степеням ε интеграла $J_1(t, \varepsilon)$. Учитывая, что в данном случае

$$g(t,\varepsilon)=\sum\nolimits_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r g_r(t),\ u_1(0,\varepsilon)=1;$$
$$u_1(t,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{a(t)-\mu(t)}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta\right)\frac{d}{dt}\times$$
$$\times\left[\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(\theta)d\theta\right)u_1(t,\varepsilon)\right]-\frac{g(t,\varepsilon)}{a(t)-\mu(t)},$$

а также введя обозначения

$$k_1(t,s)\equiv K(t,s)y_1(s), k_{1r}(t,s)\equiv K(t,s)y_1(s)g_r(s),$$

интеграл $J_1(t, \varepsilon)$ перепишем в виде:

$$\begin{aligned}
J_1(t,\varepsilon) &\equiv \boxed{\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right) K(t,s)y_1(s)u_1(s,\varepsilon)ds} \equiv \\
&\equiv \varepsilon\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_s^t \mu(\theta)d\theta + \int_0^s \mu(\theta)d\theta\right)\right) I_1^0(k_1(t,s))\times \\
&\times d\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu(\theta)d\theta\right)u_1(s,\varepsilon)\right)ds - \\
&-\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^r \int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right) I_1^0(k_{1r}(t,s))ds,
\end{aligned} \tag{8}$$

где введены операторы

$$I_1^0 \equiv \frac{1}{a(s)-\mu(s)};\ I_1^m \equiv \frac{1}{a(s)-\mu(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_0^{m-1},\ (m\geq 1).$$

Первый из интегралов в (8) возьмем по частям:

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(\theta)d\theta\right)\int_0^t I_1^0(k_1(t,s))d\times \\
&\times\left(\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu(\theta)d\theta\right)u_1(s,\varepsilon)\right)ds= \\
&=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(\theta)d\theta\right)(I_1^0(k_1(t,s)))_{s=t}\times \\
&\times\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(\theta)d\theta\right)u_1(t,\varepsilon)- \\
&-(I_1^0(k_1(t,s)))_{s=0}1)-\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(\theta)d\theta\right)\times \\
&\times\int_0^t \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu(\theta)d\theta\right)\times u_1(s,\varepsilon)\left(\frac{\partial I_1^0(k_1(t,s))}{\partial s}\right)ds = \\
&=\left[(I_1^0(k_1(t,s)))_{s=t}u_1-(I_1^0(k_1(t,s)))_{s=0}u_2\right]- \\
&-\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)u_1(s,\varepsilon)\left(\frac{\partial}{\partial s}I_1^0(k_1(t,s))\right)ds.
\end{aligned}$$

Остальные интегралы в (8) — интегралы типа $J_0(t, \varepsilon)$, поэтому можно записать:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)I_1^0(k_{1r}(t,s))ds= \\
&=\varepsilon\Big[(I_0^0(I_1^0(k_{1r}(t,s))))_{s=0}u_2- \\
&-(I_0^0(I_1^0(k_{1r}(t,s))))_{s=t}\Big]- \\
&-\varepsilon\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}I_1^0(k_{1r}(t,s))\right)ds
\end{aligned}$$

Таким образом, одна операция интегрирования по частям с применением леммы позволяет представить $J_1(t, \varepsilon)$ в виде:

$$\begin{aligned}
&J_1(t,\varepsilon)=\varepsilon\left[(I_1^0k_1(t,s)))_{s=t}u_1-(I_1^0k_1(t,s)))_{s=0}u_2\right]- \\
&-\boxed{\varepsilon\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)u_1(s,\varepsilon)\left(\frac{\partial}{\partial s}I_1^0(k_1(t,s))\right)ds}- \\
&-\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^{r+1}\left[(I_0^0(I_1^0(k_{1r}(t,s))))_{s=0}.u_2-(I_0^0(I_1^0(k_{1r}(t,s))))_{s=t}\right]+ \\
&+\sum_{r=1}^{l+1}\varepsilon^{r+1}\int_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(\theta)d\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial s}(I_1^0(k_{1r}(t,s)))\right)ds,
\end{aligned}$$

где функции $u_1 = u_1(t, \varepsilon)$, $u_2 = u_2(t, \varepsilon)$ удовлетворяют нормальной форме (3).

Ясно, что многократные применения леммы (если сравнить интегралы, записанные в рамках) и операции интегрирования по частям позволяют записать $J_1(t, \varepsilon)$ в виде формального ряда

$$J_1(t,\varepsilon)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}\left(v_1^{(m)}(t)u_1+v_2^{(m)}(t)u_2+v_0^{(m)}(t)\right),$$

который будет асимптотически сходиться к $J_1(t, \varepsilon)$ (при $\varepsilon \to +0$ равномерно по $t \in [0, T]$ [1]. Учитывая, что такое же утверждение справедливо и для $J_0(t, \varepsilon)$ (см. ряд (7)), придем к выводу, что класс $M_\varepsilon = U|_{u=u(t,\varepsilon)}$ инвариантен относительно интегрального оператора J.

Группируя в $Jy(t, u)$ коэффициенты при одинаковых степенях ε, запишем $Jy(t, u)$ в виде:

$$Jy(t,u)=R_0\,y(t,u)+\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{k+1}R_{m+1}y(t,u), \tag{9}$$

где $u = u(t, \varepsilon)$ — решение нормальной формы (3); операторы $R_m : U \to U$ (операторы порядка по ε) таковы, что их образ $R_m y(t, u)$ является суммой всех коэффициентов при ε^m в $Jy(t, u)$. Явные выражения указанных операторов при $m = 0,1$ таковы ($y(t,u)=y_1(t)u_1+y_2(t)u_2+y_0(t)$):

$$\begin{aligned}
&R_0\,y(t,u)=u_2\int_0^t K(t,s)y_2(s)ds; \\
&R_1\,y(t,u)=\left(I_1^0(K(t,s)y_1(s))\right)_{s=t}u_1- \\
&-\left(I_1^0(K(t,s)y_1(s))\right)_{s=0}u_2+ \\
&+\left(I_0^0\left(K(t,s)y_0(s)\right)\right)_{s=0}u_2- \\
&-\left(I_0^0(K(t,s)y_0(s))\right)_{s=t},
\end{aligned}$$

где I_0^m, I_1^m — введенные операторы.

Выражения для $R_m y(t, u)$ при $m \geq 2$ довольно громоздкие (их не выписываем). Если

$$\tilde{y}(t,u,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,u) \tag{10}$$

— ряд с коэффициентами $y_k(t, u) \in U$, то формальное расширение $\tilde{J}$ оператора J на рядах такого типа строится по известному правилу [1]:

$$\tilde{J}\tilde{y}(t,u,\varepsilon)\equiv\tilde{J}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_k(t,u)\right)\overset{\text{def}}{=}\sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^\nu\sum_{s=0}^{\nu}R_{\nu-s}y_s(t,u).$$

Теперь легко выписать регуляризованную задачу вида

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde{y}}{\partial t}+\left[a(t)u_1+\sum_{j=1}^{l+1}\varepsilon^j g_j(t)\right]\frac{\partial\tilde{y}}{\partial u_1}+\mu(t)u_2\frac{\partial\tilde{y}}{\partial u_2}-\qquad(*)$$
$$-a(t)\tilde{y}-\tilde{J}\tilde{y}=h(t),\ \tilde{y}(0,\overline{1},\varepsilon)=y^0.$$

Эта задача имеет смысл в классе функций $\tilde{y}(t,u,\varepsilon)$, представимых рядами (10), сходящимися асимптотически (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $(t, u)\in[0, T]\times\Pi$, где $\Pi=\{u{:}|u_j<1+\delta, j=1, 2\}$, $\delta>0$ — малая постоянная.

Поскольку задача (*) регулярна по ε при $\varepsilon\to+0$ то к ней можно применить теорию Пуанкаре (в форме метода С.А. Ломова) и получить регуляризованное асимптотическое решение. При этом главный член асимптотики решения (2) имеет вид [5, с. 126]:

$$y_{\varepsilon 0}(t)\equiv y_0(t,u^{(0)}(t,\varepsilon))=y^0\exp\left(\int_0^t\frac{K(s,s)}{a(s)-\mu(s)}ds\right)u_1^{(0)}(t,\varepsilon),\quad(11)$$

а функция $u_1^{(0)}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет задаче

$$\varepsilon\dot{u}_1^{(0)}=a(t)u_1^{(0)}+\varepsilon g_1(t),u_1^{(0)}(0,\varepsilon)=1,$$

где $g_1(t)=\dfrac{h(t)}{y^0}\exp\left(-\displaystyle\int_0^t\frac{K(s,s)}{a(s)-\mu(s)}ds\right).$

Используя результат (11), изучим предельный переход при $\varepsilon\to+0$ в решении задачи (2) и покажем, что в случае $S=[t_1, t_2]\subset(0, T)$ точное решение $y(t,\varepsilon)$ имеет два слоя: пограничный слой в окрестности точки $t=0$ и внутренний переходный слой (контрастную структуру [6]) в окрестности точки $t=t_2$.

Заметим, что для регуляризации задачи в случае точечной нестабильности спектра $\{\lambda_j(t)\}$ предельного оператора $A(t)$ $\lambda_1(t)=l(t)t^k\ (l(t)<0\ \forall t\in[0,T], k\in\mathbb{N})$ в дифференциальной системе

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=A(t)y+h(t),\ y(0,\varepsilon)=y^0$$

используются (помимо спектра $\{\lambda_j(t)\}$) спецфункции [7]:

$$\sigma_j=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\lambda_1(\theta)d\theta\right)\times$$
$$\times\int_0^t\frac{s^j}{j!}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\lambda_1(\theta)d\theta\right)ds\ \left(j=\overline{0,k-1}\right).$$

Однако попытка применить соответствующее пространство безрезонансных решений [2] для регуляризации интеграла в аналогичной интегродифференциальной системе не увенчалась успехом, так как оказалось невозможным получение разложения интеграла в асимптотический ряд по степеням ε, поэтому регуляризация с помощью нормальных форм и в этом случае наиболее естественна. Отметим, что данная регуляризация весьма полезна и в случае интегральных операторов типа Фредгольма [8, 9].

Литература

1. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы с контрастными структурами // Математический сборник. 2005. Т. 196. № 2. С. 29—56.

2. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений.: М.: Наука, 1981.

3. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во МГУ, 2011.

4. **Бободжанов А.А.,Сафонов В.Ф.** Уравнения с нестабильным спектральным значением ядра интегрального оператора и контрастные структуры // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42. № 5. С. 660—673.

5. **Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.** Сингулярно возмущенные интегродифференциальные уравнения типа Фредгольма и системы с внутренними переходными слоями. М.: Спутник +, 2018.

6. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.** Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 41. № 7. С. 799—851.

7. **Елисеев А.Г., Ломов С.А.** Теория сингулярных возмущений в случае сингулярных особенностей пре-

References

1. **Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.** Singulyarno Vozmushchennye Integrodifferentsial'nye Sistemy s Kontrastnymi Strukturami. Matematicheskiy Sbornik. 2005;196;2:29—56. (in Russian).

2. **Lomov S.A.** Vvedenie v Obshchuyu Teoriyu Singulyarnykh Vozmushcheniy.: M.: Nauka, 1981. (in Russian).

3. **Lomov S.A., Lomov I.S.** Osnovy Matematicheskoy Teorii Pogranichnogo Sloya. M.: Izd-vo MGU, 2011. (in Russian).

4. **Bobodzhanov A.A.,Safonov V.F.** Uravneniya s Nestabil'nym Spektral'nym Znacheniem Yadra Integral'nogo Operatora i Kontrastnye Struktury. Differentsial'nye uravneniya. 2006;42;5:660—673. (in Russian).

5. **Safonov V.F., Bobodzhanov A.A.** Singulyarno Vozmushchennye Integrodifferentsial'nye Uravneniya Tipa Fredgol'ma i Sistemy s Vnutrennimi Perekhodnymi Sloyami. M.: Sputnik +, 2018. (in Russian). (in Russian).

6. **Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N.** Kontrastnye Struktury v Singulyarno Vozmushchennykh Zadachakh. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki. 2011;41;7:799—851. (in Russian).

7. **Eliseev A.G., Lomov S.A.** Teoriya Singulyarnykh Vozmushcheniy v Sluchae Singulyarnykh Osobennostey

дельного оператора // Математический сборник. 1986. Т. 131 (173). № 4. С. 544—557.

8. **Бободжанов А.А.,Сафонов В.Ф.** «Всплески» в интегродифферниальных уравнениях Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами // Матемематические заметки. 2009. Т. 85. Вып. 2. С. 163—179.

9. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегродифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами // Математический сборник. 2013. Т. 204. № 7. С. 47—70.

Predel'nogo Operatora. Matematicheskiy Sbornik. 1986; 131 (173);4:544—557. (in Russian).

8. **Bobodzhanov A.A.,Safonov V.F.** «Vspleski» v Integrodiffernial'nykh Uravneniyakh Fredgol'ma s Bystro Izmenyayushchimisya Yadrami. Matemematicheskie Zametki. 2009;85;2:163—179. (in Russian).

9. **Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.** Metod Normal'nykh Form v Singulyarno Vozmushchennykh Sistemakh Integrodifferentsial'nykh Uravneniy Fredgol'ma s Bystro Izmenyayushchimisya Yadrami. Matematicheskiy Sbornik. 2013;204;7:47—70. (in Russian).

Сведения об авторах:

Бободжанов Абдухафиз Абдурасулович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: BobojanovA@mpei.ru
Сафонов Валерий Федорович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: SafonovVF@mpei.ru

Information about authors:

Bobodzhanov Abdukhafiz A. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: BobojanovA@mpei.ru
Safonov Valeriy F. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: SafonovVF@mpei.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *25.12.2018*
The article received to the editor: *25.12.2018*