

УДК 519.27

DOI: 10.24160/1993-6982-2020-3-92-101

## Алгоритм кумулятивных сумм для обнаружения изменений ковариационной матрицы многомерных временных рядов

Г.Ф. Филаретов, П.С. Симоненков

Рассмотрена задача обнаружения спонтанного изменения вероятностных характеристик (разладки) векторных временных рядов с помощью известного алгоритма кумулятивных сумм (АКС). Исследован случай, когда оно носит характер скачкообразного изменения элементов ковариационной матрицы временного ряда. Предложено использование предварительного линейного преобразования значений наблюдаемого временного ряда, обеспечивающего одновременное преобразование ковариационной матрицы до изменения к единичному виду, а ковариационной матрицы после изменения — к диагональному. Даны базовые положения, описывающие соответствующий алгоритм обнаружения, а также соотношения, реализующие указанное линейное преобразование. Показано, что его применение позволяет существенно упростить решение вопросов синтеза контролирующего алгоритма с заданными свойствами. Это связано с тем, что получающийся в результате такого преобразования временной ряд имеет некоррелированные компоненты, а изменения сводятся к отклонению дисперсий этих компонент от исходного единичного значения. Для двумерного случая детально проанализирована процедура синтеза контролирующего алгоритма. Для ее практической реализации предложены полученные с помощью метода имитационного моделирования расчетные соотношения, позволяющие по заданному значению интервала между ложными тревогами найти порог срабатывания контролирующего алгоритма и оценить среднее время запаздывания в обнаружении разладки. Представлен пример реализации такого синтеза, иллюстрирующей весь процесс построения контролирующей процедуры.

*Ключевые слова:* многомерный временной ряд; поиск изменения элементов ковариационной матрицы; многомерный алгоритм кумулятивных сумм; одновременное линейное преобразование ковариационных матриц; синтез контролирующего алгоритма.

*Для цитирования:* Филаретов Г.Ф., Симоненков П.С. Алгоритм кумулятивных сумм для обнаружения изменений ковариационной матрицы многомерных временных рядов // Вестник МЭИ. 2020. № 3. С. 92—101. DOI: 10.24160/1993-6982-2020-3-92-101.

## A Cumulative Sum Algorithm for Detecting Changes in the Covariance Matrix of Multidimensional Time Series

G.F. Filaretov, P.S. Simonenkov

The problem of detecting spontaneous changes in the probabilistic characteristics (mismatching) of vector time series using the well-known cumulative sum algorithm (CUSUM) is considered. The case in which it is in the form of a stepwise change in the entries of the time series covariance matrix is studied. To solve this problem, it is proposed to use a preliminary linear transformation of the values of the observed time series, which ensures simultaneous transformation of the covariance matrix to the unity form before the change, and to the diagonal form after the change. Basic provisions that describe the corresponding detection algorithm and the relationships using which the above-mentioned linear transformation is implemented are given. It is shown that its application can significantly simplify the solution of matters concerned with synthesizing a control algorithm with the specified properties. This is due to the fact that the time series resulting from such transformation has uncorrelated components, and the changes boil down to deviation of the variances of these components from the original unity value.

For the two-dimensional case, the procedure for synthesizing the control algorithm is considered in detail. For its practical implementation, the calculation relations obtained using the simulation method are presented that make it possible to find the threshold of the control algorithm from the given value of the interval between false alarms and to estimate the average delay time in detecting a mismatch. An example of implementing such synthesis is presented, which illustrates the entire process of constructing a controlling procedure.

*Key words:* multidimensional time series, detection of changes in the covariance matrix entries, multidimensional cumulative sum algorithm, simultaneous linear transformation of covariance matrices, synthesis of a control algorithm.

*For citation:* Filaretov G.F., Simonenkov P.S. A Cumulative Sum Algorithm for Detecting Changes in the Covariance Matrix of Multidimensional Time Series. Bulletin of MPEI. 2020;3:92—101. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2020-3-92-101.

### Введение

Проблема обнаружения спонтанного изменения свойств (разладки) стохастических сигналов и динамических систем с целью контроля за состоянием объектов, явлений или процессов и оперативного выявления отклонений от заданных значений контролируемых показателей является в настоящее время одной из самых актуальных и встречается в различных предметных об-

ластях (промышленности, экологии, геофизике, медицине и др.). Первые работы по данному направлению появились достаточно давно [1, 2], но интерес к затронутой в них проблематике с годами не только не уменьшается, а скорее, наоборот, увеличивается. Об этом наглядно свидетельствуют данные библиометрического анализа, зафиксировавшего экспоненциальный рост числа публикаций по данной тематике, начиная с 1964 г. и по настоящее время [3].

Среди последовательных алгоритмов обнаружения разладки временных рядов наибольшее распространение на практике получили те или иные разновидности алгоритмов, базирующихся на видоизменённом последовательном анализе, обычно называемые алгоритмами кумулятивных сумм (АКС) или CUSUM-алгоритмами, обладающими определенными оптимальными свойствами [4].

В последнее время особое внимание уделяется разработке CUSUM-алгоритмов для многомерных временных рядов, в том числе для наиболее сложного варианта, когда разладка связана с изменением значений элементов ковариационной матрицы. С характерными примерами можно познакомиться по публикациям [5 — 10]. Как правило, в данных алгоритмах используется то или иное преобразование исходных ковариационных матриц, причем выбор вида преобразования, обычно, никак не обосновывается, в связи с чем остается неясным, не теряется ли при этом часть информации, необходимой для эффективного решения задачи обнаружения разладки. Кроме того, полученные в них конечные результаты не позволяют конструктивно решать задачи синтеза необходимой контролирующей процедуры.

Под синтезом понимается построение контролирующего алгоритма со статистическими характеристиками, задаваемыми пользователем, исходя из особенностей решаемой прикладной задачи. В качестве ключевых таких характеристик почти всегда используются средний интервал  $\bar{T}_{\text{ЛП}}$  между появлениями сигналов ложной тревоги, т. е. сигнала о наличии разладки, когда в действительности она отсутствует, и среднее время запаздывания  $\bar{\tau}$  в обнаружении разладки определенной интенсивности [2, 11]. Практически для реализации процедуры синтеза должна быть известна зависимость значений решающего порога  $H$  от  $\bar{T}_{\text{ЛП}}$ , получение которой в большинстве случаев связано с большими трудностями и часто осуществляется только с помощью метода имитационного моделирования

Цель настоящей работы — создание CUSUM-алгоритма, предназначенного для обнаружения разладки по ковариационным характеристикам гауссовского многомерного временного ряда, в значительной степени свободного от указанных недостатков и существенно облегчающего получение информации, необходимой для его синтеза.

### Постановка задачи

Наблюдается дискретный  $v$ -мерный временной ряд

$$\mathbf{x}(t) = \|x_1(t), x_2(t), \dots, x_v(t)\|^T, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где  $\tau$  — знак транспонирования; векторы  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}(j)$  ( $t \neq j$ ) — независимы.

Предполагается, что до некоторого неизвестного момента времени  $t_0$  процесс  $\mathbf{x}(t)$  имеет  $v$ -мерную функцию плотности распределения вероятностей  $w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$ ,

а начиная с момента  $t_0$  — функцию плотности  $w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$ . Назовем такое скачкообразное изменение вектора параметров  $\boldsymbol{\theta}$  разладкой наблюдаемого процесса  $\mathbf{x}(t)$ . Необходимо найти неизвестный момент времени  $t_0$ , когда вектор параметров  $\boldsymbol{\theta}_0$ , характеризующих свойства данного процесса, меняется на  $\boldsymbol{\theta}_1$ , причём этот процесс должен реализовываться в реальном масштабе времени, в темпе с процессом и быть оптимальным в смысле минимизации среднего времени запаздывания  $\bar{\tau}$  в обнаружении разладки при фиксированном среднем интервале между ложными тревогами  $\bar{T}_{\text{ЛП}}$ .

Пусть контролируемый процесс  $\mathbf{x}(t)$  — гауссовский с характеристиками, задаваемыми вектором-столбцом математических ожиданий  $\mathbf{m}_{\mathbf{x}}$  и ковариационной матрицей  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}$ :

$$\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} m_{1X} \\ m_{2X} \\ \vdots \\ m_{vX} \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \sigma_{1X}^2 & \sigma_{1X}\sigma_{2X}\rho_{12} & \dots & \sigma_{1X}\sigma_{vX}\rho_{1v} \\ \sigma_{1X}\sigma_{2X}\rho_{12} & \sigma_{2X}^2 & \dots & \sigma_{2X}\sigma_{vX}\rho_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1X}\sigma_{vX}\rho_{1v} & \sigma_{2X}\sigma_{vX}\rho_{2v} & \dots & \sigma_{vX}^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай, когда:

- значения математических ожиданий  $\mathbf{m}_{\mathbf{x}}$  известны и остаются неизменными, в связи с чем без нарушения общности можно принять  $\mathbf{m}_{\mathbf{x}} = 0$ ;
- при разладке скачкообразно меняются значения элементов ковариационной матрицы, т. е. до разладки  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Sigma}_0$ , а после разладки  $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\Sigma}_1$ , где

$$\boldsymbol{\Sigma}_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{01}^2 & \sigma_{01}\sigma_{02}\rho_{12}^{(0)} & \dots & \sigma_{01}\sigma_{0v}\rho_{1v}^{(0)} \\ \sigma_{01}\sigma_{02}\rho_{12}^{(0)} & \sigma_{02}^2 & \dots & \sigma_{02}\sigma_{0v}\rho_{2v}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{01}\sigma_{0v}\rho_{1v}^{(0)} & \sigma_{02}\sigma_{0v}\rho_{2v}^{(0)} & \dots & \sigma_{0v}^2 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{11}\sigma_{12}\rho_{12}^{(1)} & \dots & \sigma_{11}\sigma_{1v}\rho_{1v}^{(1)} \\ \sigma_{11}\sigma_{12}\rho_{12}^{(1)} & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{12}\sigma_{1v}\rho_{2v}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{11}\sigma_{1v}\rho_{1v}^{(1)} & \sigma_{12}\sigma_{1v}\rho_{2v}^{(1)} & \dots & \sigma_{1v}^2 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что для произвольного  $n$ -го отсчета  $v$ -мерного временного ряда функции плотности  $w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_0)$  и  $w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}_1)$  примут следующий вид:

$$w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}_0) = w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma}_0) = \frac{1}{(2\pi)^{v/2} |\boldsymbol{\Sigma}_0|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \mathbf{x}_n};$$

$$w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\theta}_1) = w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\Sigma}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{v/2} |\boldsymbol{\Sigma}_1|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}_n^T \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1} \mathbf{x}_n}.$$

Классический алгоритм кумулятивных сумм основан на использовании следующей решающей функции [1]:

$$g_n = \max(0; g_{n-1} + z_n - f), \quad (1)$$

где  $g_0$  — начальное значение решающей статистики,  $g_0 = 0$ ;  $f$  — некоторая константа (далее  $f = 0$ ), а  $z_n$  можно определить в данном случае следующим соотношением:

$$z_n = 2 \ln [w_X(\mathbf{x}_n, \Sigma_1) / w_X(\mathbf{x}_n, \Sigma_0)]. \quad (2)$$

В развернутом виде (2) примет вид:

$$z_n = \mathbf{x}_n^T (\Sigma_0^{-1} - \Sigma_1^{-1}) \mathbf{x}_n - \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_0|}. \quad (3)$$

Для последующего анализа без потери общности целесообразно перейти к нормированной переменной  $\mathbf{x}^0(t)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0(t) &= \|x_1(t)/\sigma_{01}, x_2(t)/\sigma_{02}, \dots, x_n(t)/\sigma_{0v}\|^T = \\ &= \|x_1^0(t), x_2^0(t), \dots, x_v^0(t)\|^T, \quad t = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Для такой переменной в случае отсутствия разладки ковариационная матрица  $\Sigma_0$  превратится в корреляционную матрицу  $\mathbf{R}_0$ , а  $\Sigma_1$  может быть записана в ином виде:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12}^{(0)} & \dots & \rho_{1v}^{(0)} \\ \rho_{12}^{(0)} & 1 & \dots & \rho_{2v}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1v}^{(0)} & \rho_{2v}^{(0)} & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \rho_{12}^{(1)} & \dots & k_1 k_v \rho_{1v}^{(1)} \\ k_1 k_2 \rho_{12}^{(1)} & k_2^2 & \dots & k_2 k_v \rho_{2v}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1 k_v \rho_{1v}^{(1)} & k_2 k_v \rho_{2v}^{(1)} & \dots & k_v^2 \end{pmatrix},$$

где  $k_i^2 = \sigma_{0i}^2 / \sigma_{0i}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$  — показатель кратности изменения  $i$ -й дисперсии при появлении разладки.

Для нормированной переменной  $\mathbf{x}^0(t)$  формула (3) примет следующий вид:

$$z_n = \mathbf{x}_n^{0T} (\mathbf{R}_0^{-1} - \Sigma_1^{-1}) \mathbf{x}_n^0 - \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\mathbf{R}_0|}. \quad (4)$$

Соотношение (4) крайне неудобно для анализа свойств контролирующего алгоритма и получения конструктивных рекомендаций по его синтезу.

Далее рассматривается способ представления соотношения (4) в иной форме, более удобной для использования, без потери какой-либо информации, снижающей эффективность соответствующего алгоритма обнаружения разладки.

**Исходная идея и ее реализация**

Предлагается использовать некоторое предварительное преобразование значений контролируемого многомерного процесса, обеспечивающего в свою очередь желательный вид матриц  $\mathbf{R}_0$  и  $\Sigma_1$ . Такое преобразование связано с использованием известного теоретического результата матричного исчисления, в

соответствии с которым существует невырожденное линейное преобразование  $\mathbf{y}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n^0)$ , приводящее одновременно две квадратные матрицы к диагональному виду, причем одна из них приводится к единичной матрице. Необходимое условие существования указанного преобразования — положительная определенность одной из матриц, которая в конечном итоге и будет приведена к единичной форме.

Применительно к решаемой задаче матрицы  $\mathbf{R}_0$  и  $\Sigma_1$  являются положительно определенными и, следовательно, такое преобразование существует. На практике его поиск сопряжен с реализацией ряда последовательных процедур.

Преобразование корреляционной матрицы  $\mathbf{R}_0$  к диагональному виду с помощью линейного преобразования  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_1(\mathbf{x}^0)$ . Для этого выполняются следующие операции.

а) Определение корней  $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_v^*$  характеристического уравнения

$$|\mathbf{R}_0 - \lambda^* I| = 0,$$

где  $I$  — единичная матрица размера  $v \times v$ .

Данное вычисление может быть проведено с помощью одной из известных вычислительных процедур.

б) Нахождение собственных векторов  $L_j^* = \|l_{j1}^*, \dots, l_{jv}^*\|$ ,  $j = 1, v$  искомого линейного преобразования путем решения  $v$  систем линейных алгебраических уравнений:

$$|\mathbf{R}_0 - \lambda_j^* I| L_j^{*T} = 0. \quad (5)$$

В развернутом виде (5) примет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda_j^*) l_{j1}^* + r_{12} l_{j2}^* + \dots + r_{1v} l_{jv}^* &= 0; \\ r_{21} l_{j1}^* + (1 - \lambda_j^*) l_{j2}^* + \dots + r_{2v} l_{jv}^* &= 0; \\ &\dots \\ r_{v1} l_{j1}^* + r_{v2} l_{j2}^* + \dots + (1 - \lambda_j^*) l_{jv}^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Собственные векторы удовлетворяют требованию ортонормальности и в совокупности образуют ортогональную матрицу линейного преобразования  $\mathbf{L}_1$ :

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} l_{11}^* & l_{12}^* & \dots & l_{1v}^* \\ l_{21}^* & l_{22}^* & \dots & l_{2v}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{v1}^* & l_{v2}^* & \dots & l_{vv}^* \end{pmatrix}.$$

Ковариационная матрица переменной  $\mathbf{y}_1(\mathbf{x}^0) = \mathbf{L}_1 \mathbf{x}^0$  будет диагональной

$$\Sigma_{y_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_v^* \end{pmatrix}.$$

Такое преобразование геометрически соответствует повороту координатных осей.

Преобразование ковариационной матрицы  $\Sigma_{y_1}$  к единичному виду.

Операция осуществляется с помощью матрицы преобразования  $L_2$  вида

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1^*} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2^*} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{\lambda_v^*} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Новая переменная  $y_2(x^0) = L_2 y_1(x^0)$  имеет единичную ковариационную матрицу  $I$ , а преобразование является линейным преобразованием типа растяжение–сжатие в направлении координатных осей.

Преобразование матрицы  $\Sigma_1$  к диагональному виду.

В первую очередь необходимо найти как преобразуется матрица  $\Sigma_1$  при переходе к переменной  $y_2(x^0) = L_2(L_1 x^0)$ . Эта задача легко решается с помощью известных соотношений, позволяющих найти ковариационную матрицу после любого линейного преобразования. Если обозначить  $L^* = L_2 L_1$ , то ковариационная матрица переменной  $y_2(x^0)$  будет равна  $\Sigma_{1y_2} = L^* \Sigma_1 L^{*T}$ . Последующие выкладки фактически повторяют преобразования, рассмотренные ранее, но применительно к матрице  $\Sigma_{1y_2}$ .

а) Определение корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_v$  характеристического уравнения

$$|\Sigma_{1y_2} - \lambda I| = 0.$$

б) Нахождение собственных векторов  $L_j = \|l_{j1}, \dots, l_{jv}\|$ ,  $j = \overline{1, v}$  искомого линейного преобразования путем решения  $v$  систем линейных алгебраических уравнений

$$|\Sigma_{1y_2} - \lambda I| L_j^T = 0.$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} (1 - \lambda_j) l_{j1} + r_{12} l_{j2} + \dots + r_{1n} l_{jn} &= 0; \\ r_{21} l_{j1} + (1 - \lambda_j) l_{j2} + \dots + r_{2n} l_{jn} &= 0; \\ &\dots \\ r_{1n} l_{j1} + r_{2n} l_{j2} + \dots + (1 - \lambda_j) l_{jn} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Собственные векторы образуют ортогональную матрицу линейного преобразования  $L$ :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1v} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{v1} & l_{v2} & \dots & l_{vv} \end{pmatrix}.$$

Ковариационная матрица для преобразованной переменной  $y(x^0) = L(L_2(L_1 x^0))$  будет диагональной:

$$\Sigma_y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_v \end{pmatrix}.$$

Геометрически последнее преобразование (как и первое) соответствует повороту координатных осей, но для  $y_2(x^0)$ . Отметим, что оно не влияет на результаты, полученные ранее, т. е. по-прежнему справедливо

$$y_1^T R_0 y_1 = y_2^T R_0 y_2 = I.$$

В конечном итоге для  $y(x^0)$ , полученной с помощью последовательного использования трех линейных преобразований указанного вида, матрица  $R_0$  превратится в единичную, а  $\Sigma_1$  — в диагональную. При этом  $y(x^0) = L_{\text{общ}} x^0$ , где

$$L_{\text{общ}} = L L_2 L_1. \quad (8)$$

Пример

Пусть матрицы  $R_0$  и  $\Sigma_1$  имеют следующий вид:

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0,7 \\ 0,7 & 1,5 \end{pmatrix},$$

что соответствует значениям  $k_1^2 = 2$ ,  $k_2^2 = 1,5$  и  $r_1 = 0,4$ .

Характеристическое уравнение  $(1 - \lambda^*)^2 - 0,25 = 0$  матрицы  $R_0$  имеет корни  $\lambda_1^* = 0,5$ ,  $\lambda_2^* = 1,5$ . Используя соотношение (6), для найденных значений корней, найдем соответствующие собственные функции и матрицу  $L_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

Ковариационная матрица  $\Sigma_{y_1}$  в соответствии с (7) составляет:

$$\Sigma_{y_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix},$$

а матрица  $L_2$ :

$$L_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует

$$L^* = L_2 L_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда для  $\Sigma_{1y_2}$  после соответствующих подстановок получим:

$$\Sigma_{1y_2} = \begin{pmatrix} 2,1 & -0,5/\sqrt{3} \\ -0,5/\sqrt{3} & 4,9/3 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы  $\Sigma_{1y_2}$  имеем характеристическое уравнение

$$(2,1 - \lambda)(4,9/3 - \lambda) - 0,25/3 = 0$$

с корнями  $\lambda_1 = 2,238$  и  $\lambda_2 = 1,495$ .

Матрица  $L$  собственных функций примет следующий вид:

$$\mathbf{L} = \begin{vmatrix} -0,4309 & 0,9024 \\ -0,9024 & 0,4309 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, матрица  $\Sigma_y = \mathbf{L}\Sigma_{1y_2}\mathbf{L}^T$  равна

$$\Sigma_y = \begin{vmatrix} 2,238 & 0 \\ 0 & 1,495 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, векторная переменная  $y(\mathbf{x}^0)$  с нужными ковариационными матрицами может быть получена с помощью общего линейного преобразования вида (8) исходной переменной  $\mathbf{x}(t)$ , где для рассматриваемого примера

$$\mathbf{L}_{\text{общ}} = \begin{vmatrix} -0,0901 & -0,9519 \\ 1,1512 & -0,6536 \end{vmatrix}.$$

Обратимся вновь к соотношению (4). Для преобразованной переменной  $y(\mathbf{x}^0)$  оно примет вид:

$$z_n = \mathbf{y}_n^T (\mathbf{I}^{-1} - \Sigma_y^{-1}) \mathbf{y}_n - \ln(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_v),$$

а в развернутом случае:

$$z_n = \sum_{i=1}^v \left( 1 - \frac{1}{\lambda_i} \right) y_{in}^2 - \sum_{i=1}^v \ln \lambda_i = \sum_{i=1}^v \left[ \left( 1 - \frac{1}{\lambda_i} \right) y_{in}^2 - \ln \lambda_i \right]. \quad (9)$$

Стоит отметить, что математическое ожидание  $z_n$  в общем случае равно

$$\begin{aligned} M\{z_n\} &= \sum_{i=1}^v \left[ \left( 1 - \frac{1}{\lambda_i} \right) M\{y_{in}^2\} - \ln \lambda_i \right] = \\ &= \sum_{i=1}^v \left[ \left( 1 - \frac{1}{\lambda_i} \right) \sigma_{y_i}^2 - \ln \lambda_i \right], \end{aligned}$$

откуда следует, что при отсутствии разладки, когда все  $\sigma_{y_i}^2 = 1$

$$M\{z_n | \text{при отсутствии разладки}\} = \sum_{i=1}^v \left[ \left( 1 - \frac{1}{\lambda_i} \right) - \ln \lambda_i \right],$$

а при номинальной разладке, когда  $\sigma_{y_i}^2 = \lambda_i$ :

$$M\{z_n | \text{при номинальной разладке}\} = \sum_{i=1}^v \left[ (\lambda_i - 1) - \ln \lambda_i \right].$$

Последующее исследование данной многомерной контролирующей процедуры с целью получения информации, необходимой для синтеза процедуры с заданными свойствами, возможно только с помощью имитационного эксперимента. Однако проанализированное преобразование позволяет существенно упростить как разработку программных средств для его реализации, так и сам процесс имитационного экспериментирования. В данном случае вместо генерации процессов с заданными ковариационными матрицами необходима лишь генерация нескольких некоррелиро-

ванных процессов с определенными дисперсиями, что намного проще.

Проведем последующее более углубленное изучение для частного, но достаточно важного двумерного случая, что позволит, с одной стороны, выявить некоторые его специфические особенности по сравнению с одномерным вариантом, а, с другой, — получить содержательную информацию для синтеза соответствующего контролирующего алгоритма с заданными свойствами.

*Разладка двумерных процессов по ковариационной матрице.*

В двумерном случае исходная информация, необходимая для синтеза CUSUM-алгоритма с требуемыми свойствами, задается с помощью матриц

$$\mathbf{R}_0 = \begin{vmatrix} 1 & r_0 \\ r_0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Sigma_1 = \begin{vmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 r_1 \\ k_1 k_2 r_1 & k_2^2 \end{vmatrix}.$$

Для синтеза контролирующей процедуры необходимо для заданных пользователем значений  $r_0$ ,  $k_1^2$ ,  $k_2^2$ ,  $r_1$  и среднего времени в обнаружении разладки  $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$  найти решающий порог  $H$ , а также оценить быстродействие процедуры путем определения показателя  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$  — среднего времени запаздывания в обнаружении номинальной разладки (т. е. разладки с параметрами  $k_1^2$ ,  $k_2^2$ ,  $r_1$ ). Определение всех перечисленных характеристик выполнено с помощью метода имитационного моделирования. Для этого разработан специализированный программный модуль «АКСИМ-КМД», предназначенный для моделирования и исследования АКС в случае разладки двумерного гауссовского процесса  $y(n)$  по ковариационной матрице при ее изменении от  $\mathbf{R}_y$  до  $\Sigma_y$ :

$$\mathbf{R}_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \Sigma_y = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}.$$

В указанный модуль входят следующие функциональные блоки:

- генераторы двух некоррелированных дискретных гауссовских процессов  $u_1(i)$ ,  $u_2(i)$  с некоррелированными отсчетами и параметрами, задаваемыми пользователем (в числе параметров задавались нулевые значения математических ожиданий  $m(u_1) = 0$  и  $m(u_2) = 0$ , дисперсии  $\sigma^2(u_1) = \sigma^2(u_2) = 1$  при моделировании ситуации в отсутствии разладки и  $\sigma^2(u_1) = \lambda_1$ ,  $\sigma^2(u_2) = \lambda_2$  при ее наличии;
- операционный блок, имитирующий работу алгоритма кумулятивных сумм в соответствии с соотношениями (1), (9) при  $v = 2$  с фиксацией интервалов  $T_g$  ( $g = 1, 2, \dots$ ) между моментом начала очередной контролирующей процедуры и появлением сигнала о наличии разладки, когда решающая функция превышает пороговое значение  $H$ ;
- блок управления, позволяющий задавать необходимое количество повторных контролирующих процедур  $N$  с тем, чтобы обеспечить необходимую точность результатов моделирования;

• блок статистической обработки, определяющий среднее значение и дисперсию интервалов  $T_g$  ( $g = 1, 2, \dots, N$ ), а также дисперсию  $\bar{T}$ :

$$\bar{T} = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N T_g; \sigma_{T_g}^2 = \frac{1}{N} \sum_{g=1}^N (T_g - \bar{T})^2; \sigma^2\{\bar{T}\} = \frac{1}{N} \sigma_{T_g}^2.$$

При проведении имитационного эксперимента использовали все возможные различные комбинации значений  $\lambda_1, \lambda_2$  из перечня возможных значений, приведенного в [11]: 1/3; 1/2,5; 1/2; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0 при  $\bar{T}_{\text{ЛТ}} = 500, 1000, 1500, 2000, 3000, 5000$ . Число повторений  $N$  выбирали равным 10000 при нахождении  $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$  и 5000 при вычислении  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$ , что обеспечило приемлемую точность моделирования. По результатам моделирования для каждого значения  $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$  формировали таблицы оценочных значений решающего порога  $\tilde{H}$  и интервала  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$  для различных комбинаций  $\lambda_1, \lambda_2$ . В качестве образцов для  $\bar{T}_{\text{ЛТ}} = 1000$  приведены табл. 1, 2. В силу симметрии условий задания значений  $\lambda_1, \lambda_2$  относительно главной диагонали можно было ожидать совпадение значений  $\tilde{H}$  или  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$  для симметрично расположенных элементов таблиц. Однако на практике они хоть и весьма близки, но все-таки не совпадают, что вполне объяснимо имеющимися статистическими погрешностями результатов имитационного эксперимента.

Вместе с тем эта симметрия должна быть принята во внимание при получении аналитической зависимости вида  $H = \varphi(\lambda_1, \lambda_2 | \bar{T}_{\text{ЛТ}})$  или  $\bar{\tau}_{\text{зап}} = \psi(\lambda_1, \lambda_2 | \bar{T}_{\text{ЛТ}})$ , что совершенно необходимо как для реализации процедуры синтеза контролирующего алгоритма, так и для оценки его быстродействия при различных фактических значениях  $\lambda_1, \lambda_2$ . Указанную зависимость можно оценивать с помощью стандартного регрессионного анализа для регрессионной модели следующего вида, позволяющего учесть указанную симметрию матрицы факторов:

$$\hat{\varphi}(\lambda_1, \lambda_2 | \bar{T}_{\text{ЛТ}}) = a + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + p(\lambda_1^3 + \lambda_2^3) + q\lambda_1\lambda_2; \quad (10)$$

$$\hat{\psi}(\lambda_1, \lambda_2 | \bar{T}_{\text{ЛТ}}) = a' + b'(\lambda_1 + \lambda_2) + c'(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + p'(\lambda_1^3 + \lambda_2^3) + q'\lambda_1\lambda_2. \quad (11)$$

Для  $\bar{T}_{\text{ЛТ}} = 1000$  по данным, приведенным в табл. 1, получим:

$$\hat{H}(\lambda_1, \lambda_2) = 14,298 - 6,267(\lambda_1 + \lambda_2) + 3,537(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 0,607(\lambda_1^3 + \lambda_2^3) + 0,194\lambda_1\lambda_2. \quad (12)$$

Все коэффициенты регрессии в (12) значимы. Коэффициент детерминации  $R^2$ , характеризующий общее качество полученной регрессионной модели [13], равен 0,866, что свидетельствует о достаточно высокой

Таблица 1

#### Оценочные значения порога $\tilde{H}$ для различных комбинаций $\lambda_1, \lambda_2$ ( $\bar{T}_{\text{ЛТ}} = 1000$ )

$\lambda_1$	$\lambda_2$	1/3	1/2,5	1/2	1/1,5	1,5	2	2,5	3
	1/3	10,72	10,57	10,37	10,07	9,88	9,72	9,55	9,48
	1/2,5	10,55	10,33	10,01	9,66	9,43	9,32	9,22	9,22
	1/2	10,35	10,04	9,64	9,08	8,74	8,81	8,91	8,94
	1/1,5	10,08	9,69	9,09	8,10	7,63	8,22	8,51	8,65
	1,5	9,85	9,43	8,76	7,61	7,65	8,30	8,63	8,72
	2	9,75	9,33	8,80	8,23	8,74	8,74	8,94	9,02
	2,5	9,56	9,24	8,88	8,51	8,60	8,94	9,13	9,18
	3	9,45	9,17	8,95	8,66	8,72	9,00	9,19	9,26

Таблица 2

#### Оценочные значения порога $\bar{\tau}_{\text{зап}}$ для различных комбинаций $\lambda_1, \lambda_2$ ( $\bar{T}_{\text{ЛТ}} = 1000$ )

$\lambda_1$	$\lambda_2$	1/3	1/2,5	1/2	1/1,5	1,5	2	2,5	3
	1/3	12,45	13,98	16,00	19,40	18,37	13,93	10,70	8,83
	1/2,5	13,99	16,1	19,03	23,77	22,49	15,85	11,82	9,35
	1/2	16,20	19,32	23,72	31,48	29,27	18,37	12,98	10,18
	1/1,5	19,32	23,88	31,17	50,23	43,02	22,31	14,43	10,62
	1,5	18,60	22,44	29,00	42,52	36,57	20,48	13,69	10,43
	2	13,85	15,97	18,42	22,28	20,82	14,68	11,30	9,12
	2,5	10,88	11,79	13,00	14,78	14,11	11,23	9,17	7,71
	3	8,86	9,31	9,86	10,57	10,65	9,01	7,61	6,62

точности уравнения регрессии. Об этом же говорит расчет относительных ошибок предсказания  $\delta\%$ , определяемых для каждой комбинации  $\lambda_1, \lambda_2$  по формуле:

$$\delta\% = \frac{|\tilde{H} - \hat{H}|}{\tilde{H}} \cdot 100\%. \quad (13)$$

Примерно 90% всех значений  $\delta\%$  не выходят из 5 %-й зоны.

Общее представление о характере зависимости  $\hat{H}(\lambda_1, \lambda_2)$  можно получить с помощью рис. 1, а, б, где соответствующая поверхность представлена в двух различных ракурсах.

Характер изменения значений относительных ошибок предсказания  $\delta\%$  изображен на рис. 2.

Аналогичные зависимости можно построить и для  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$ . В частности, с помощью данных из табл. 2 для  $\bar{T}_{\text{ЛТ}} = 1000$ :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{\text{зап}} = & -23,87 + 69,25(\lambda_1 + \lambda_2) - \\ & -46,05(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 8,03(\lambda_1^3 + \lambda_2^3) + 0,91\lambda_1\lambda_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Коэффициенты регрессии в (14) значимы. Коэффициент детерминации  $R^2 = 0,793$ . На рисунке 3 функция  $\hat{\tau}_{\text{зап}}(\lambda_1, \lambda_2)$  дана в графической форме.

Расчет относительных ошибок предсказания по (14) выполняется для всех комбинаций  $\lambda_1, \lambda_2$  по формуле, аналогичной (13):

$$\delta_{\text{зап}} \% = \frac{|\bar{\tau}_{\text{зап}} - \hat{\tau}_{\text{зап}}|}{\bar{\tau}_{\text{зап}}} \cdot 100\%.$$

Характер их изменения изображен на рис. 4.

Отметим, что в данном случае точность регрессионной модели не столь высока по сравнению с регрессионной моделью, предназначенной для определения порога  $H$ . Так, например, доля всех значений  $\delta_{\text{зап}} \%$ , не

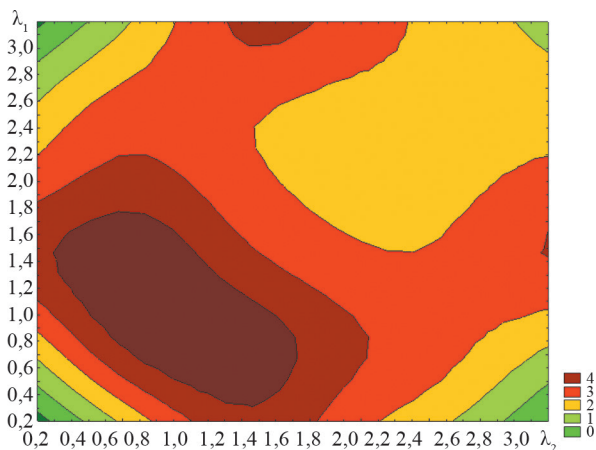


Рис. 2. Уровни значений функции  $\delta\%(\lambda_1, \lambda_2)$

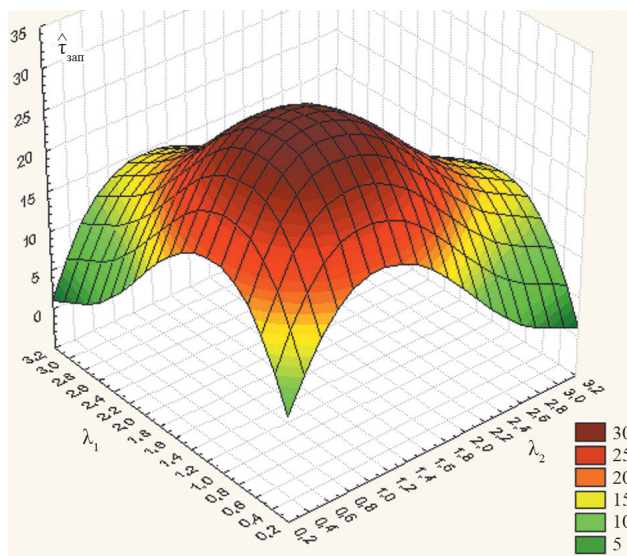


Рис. 3. Поверхность функции регрессии  $\hat{\tau}_{\text{зап}}(\lambda_1, \lambda_2)$

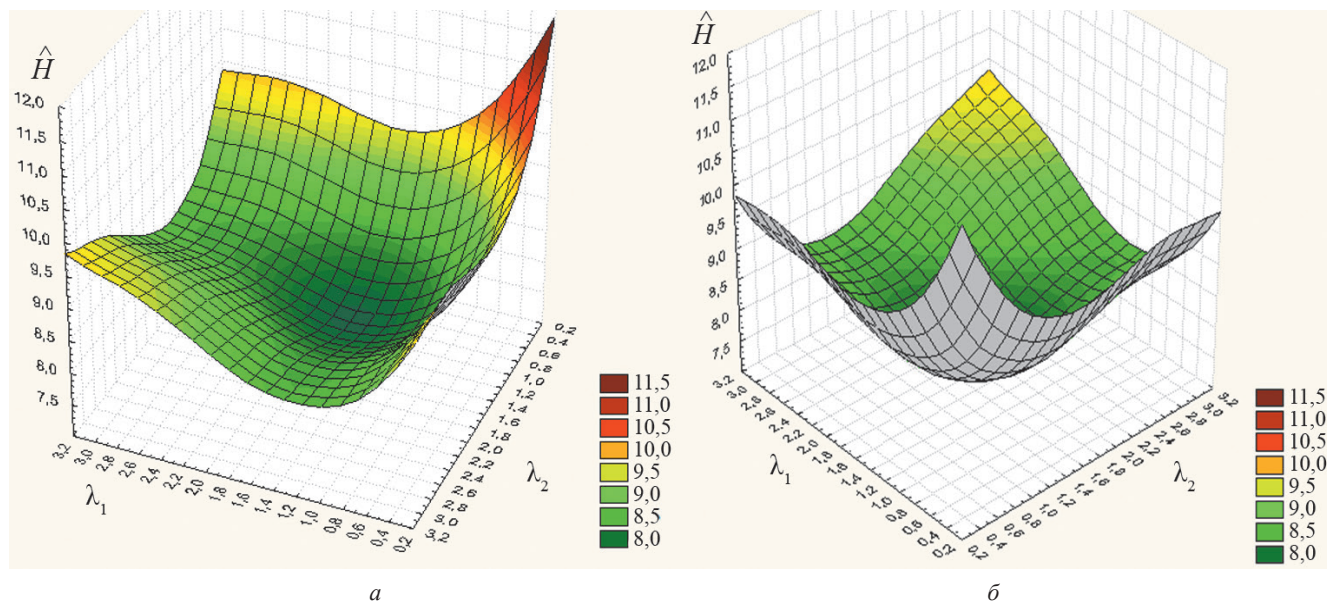
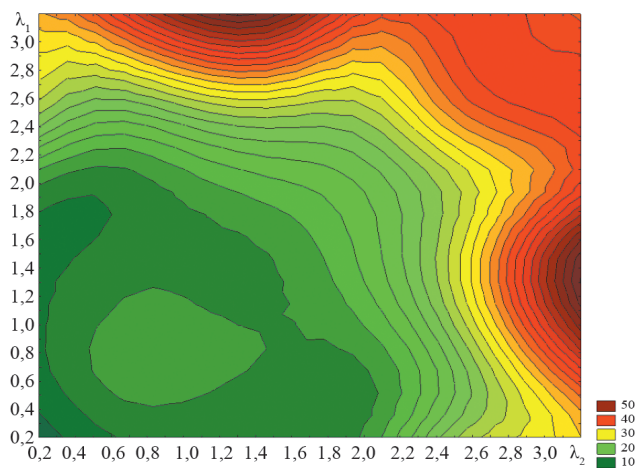


Рис. 1. Поверхность функции регрессии  $\hat{H}(\lambda_1, \lambda_2)$  в двух ракурсах

Рис. 4. Уровни значений функции  $\delta_{\text{зап}}(\lambda_1, \lambda_2)$ 

превышающих 15 %-й уровень, составляет только примерно 50%. Впрочем это не столь важно, поскольку  $\hat{\tau}_{\text{зап}}$  предназначено лишь для получения общего представления о быстродействии контролирующего алгоритма.

Сводная информация о значениях коэффициентов регрессионных моделей (10), (11) для различных значений  $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$ , дана в табл. 3, 4. Там же указаны соответствующие значения коэффициентов детерминации  $R^2$ .

Проиллюстрируем процесс синтеза контролирующего алгоритма с использованием данных приведенного ранее примера. Для проведения синтеза исследователь должен обладать исходной информацией о

ковариационных матрицах до и после разладки. Затем должны быть выполнены описанные операции по получению общего линейного преобразования значений исходных контролируемых дискретных последовательностей  $x_{1n}, x_{2n}$  в значения  $y_{1n}$  и  $y_{2n}$ , а также получены величины  $\lambda_1, \lambda_2$  (в нашем примере  $\lambda_1 = 2,238$  и  $\lambda_2 = 1,495$ ). Непосредственно процесс синтеза начинается с выбора подходящего среднего интервала между ложными тревогами  $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$ . При этом должны быть приняты во внимание как возможные потери, связанные с появлением ложного сигнала о наличии разладки, так и степень опасности длительной задержки в ее выявлении. Пусть, выбрано значение  $\bar{T}_{\text{ЛТ}} = 2000$ . С помощью уравнений (10), (11) с коэффициентами, взятыми из табл. 3, 4 для  $\bar{T}_{\text{ЛТ}} = 2000$ , определены величина решающего порога  $H$  и прогнозное значение запаздывания  $\hat{\tau}_{\text{зап}}$ , тогда  $H = 9,71$  и  $\hat{\tau}_{\text{зап}} \approx 25$ .

При практической реализации контролирующего алгоритма на каждом  $n$ -ом такте поступления входных данных  $x_{1n}, x_{2n}$  должно вычисляться значение решающей функции  $z_n$  с помощью соотношения (9), где  $y_{1n}, y_{2n}$  с учетом элементов матрицы  $L_{\text{общ}}$  определяются как:

$$y_{1n} = -0,0901x_{1n} - 0,9519x_{2n}; \quad y_{2n} = 1,1512x_{1n} - 0,6536x_{2n}.$$

### Выводы

Рассмотрена задача построения алгоритма кумулятивных сумм, предназначенного для обнаружения спонтанного изменения (разладки) временного ряда в

Таблица 3

### Значения коэффициентов регрессионных моделей для определения порога $H$

$\bar{T}_{\text{ЛТ}}$	Коэффициенты уравнения (10)					$R^2$
	$a$	$b$	$c$	$p$	$q$	
500	12,83	-6,11	3,45	-0,59	0,19	0,8620
1000	14,25	-6,20	3,49	-0,60	0,20	0,8564
1500	15,11	-6,29	3,55	-0,61	0,19	0,8574
2000	15,75	-6,40	3,62	-0,62	0,20	0,8606
3000	16,53	-6,36	3,59	-0,62	0,19	0,8610
5000	17,57	-6,40	3,63	-0,62	0,19	0,8605

Таблица 4

### Значения коэффициентов регрессионных моделей для определения $\hat{\tau}_{\text{зап}}$

$\bar{T}_{\text{ЛТ}}$	Коэффициенты уравнения (11) для $\hat{\tau}_{\text{зап}}$					$R^2$
	$a'$	$b'$	$c'$	$p'$	$q'$	
500	-17,92	55,36	-36,87	6,42	0,74	0,8083
1000	-23,88	69,25	-46,05	8,03	0,91	0,7796
1500	-27,56	77,74	-51,66	9,01	1,01	0,7857
2000	-30,16	83,65	-55,54	9,69	1,08	0,7874
3000	-34,22	92,67	-61,38	10,70	1,14	0,7921
5000	-38,28	102,44	-67,91	11,85	1,28	0,7934



виде скачкообразного изменения его ковариационной матрицы.

Предложено использование предварительного линейного преобразования значений наблюдаемого временного ряда, обеспечивающего одновременное преобразование ковариационной матрицы до разладки к единичному виду, а ковариационной матрицы при разладке — к диагональному.

Приведены базовые положения, описывающие соответствующий алгоритм обнаружения, а также соотношения, реализующие указанное линейное пре-

образование. Докзано, что его применение позволяет существенно упростить решение вопросов синтеза контролирующего алгоритма с заданными свойствами.

Для двумерного варианта проанализирована процедура синтеза контролирующего алгоритма с выбранными пользователем характеристиками на основе полученных с помощью имитационного эксперимента соотношений для определения величины решающего порога, а также оценки среднего времени запаздывания в обнаружении разладки при фиксированном интервале между ложными тревогами.

### Литература

1. Page E.S. Continuous Inspection Schemes // *Biometrika*. 1954. V. 41. No. 1. Pp. 100—115.
2. Никифоров И.В. Последовательное обнаружения изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983.
3. Shafid A. Bibliometric Analysis of EWMA and CUSUM Control Chart Schemes // *ITEE J.* 2018. V. 7. Iss. 2. Pp. 1—11.
4. Ширяев А.Н. Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима // Доклады АН СССР. 1961. Т. 138. № 5. С. 1039—1042.
5. Crosier R.B. Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-control Schemes // *Technometrics*. 1988. V. 30. Pp. 291—303.
6. Chan L.K., Zhang J. Charts Cumulative Sum Control for the Covariance Matrix // *Statistica Sinica*. 2001. V. 11. Pp. 767—790.
7. Ngai H.M., Zhang J. Multivariate Cumulative Sum Control Charts Based on Projection Pursuit // *Statistica Sinica*. 2001. V. 11. Pp. 747—766.
8. Runger, G.C., Testik M.C. Multivariate Extensions to Cumulative Sum Control Charts // *Quality and Reliability Eng. Intern.* 2004. V. 20. Pp. 587—606.
9. Yeh A.B., Lin D.K., McGrath R.N. Multivariate Control Chart for Monitoring Covariance Matrix: a Review // *Quality Techn. & Quantitative Management*. 2006. V. 3. Pp. 415—436.
10. Liu L., Zhong J., Ma Y. A Multivariate Synthetic Control Chart for Monitoring Covariance Matrix Based on Conditional Entropy // *Proc. 19<sup>th</sup> Intern. Conf. Industrial Eng. and Eng. Management*. Berlin: Springer, 2013. Pp. 99—107.
11. Филаретов Г.Ф., Червова А.А. Последовательный алгоритм обнаружения момента изменения дисперсии временного ряда // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2019. Т. 85. № 3. С. 75—82.
12. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1975.
13. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998.

### References

1. Page E.S. Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*. 1954;41;1:100—115.
2. Nikiforov I.V. *Posledovatel'noe Obnaruzheniya Izmeneniya Svoystv Vremennyh Ryadov*. M.: Nauka, 1983. (in Russian).
3. Shafid A. Bibliometric Analysis of EWMA and CUSUM Control Chart Schemes. *ITEE J.* 2018;7;2: 1—11.
4. Shiryaev A.N. *Zadacha Skorejshego Obnaruzheniya Narusheniya Stacionarnogo Rezhima*. Doklady AN SCSR. 1961;138;5:1039—1042. (in Russian).
5. Crosier R.B. Multivariate Generalizations of Cumulative Sum Quality-control Schemes. *Technometrics*. 1988;30:291—303.
6. Chan L.K., Zhang J. *Charts Cumulative Sum Control for the Covariance Matrix*. *Statistica Sinica*. 2001; 11:767—790.
7. Ngai H.M., Zhang J. *Multivariate Cumulative Sum Control Charts Based on Projection Pursuit*. *Statistica Sinica*. 2001;11:747—766.
8. Runger, G.C., Testik M.C. *Multivariate Extensions to Cumulative Sum Control Charts*. *Quality and Reliability Eng. Intern.* 2004;20:587—606.
9. Yeh A.B., Lin D.K., McGrath R.N. *Multivariate Control Chart for Monitoring Covariance Matrix: a Review*. *Quality Techn. & Quantitative Management*. 2006;3: 415—436.
10. Liu L., Zhong J., Ma Y. *A Multivariate Synthetic Control Chart for Monitoring Covariance Matrix Based on Conditional Entropy* // *Proc. 19<sup>th</sup> Intern. Conf. Industrial Eng. and Eng. Management*. Berlin: Springer, 2013: 99—107.
11. Filaretov G.F., Chervova A.A. *Posledovatel'nyy Algoritm Obnaruzheniya Momenta Izmeneniya Dispersii Vremennogo Ryada*. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*. 2019;85;3:75—82. (in Russian).
12. Levin B.R. *Teoreticheskie Osnovy Statisticheskoy Radiotekhniki*. M.: Sovetskoe Radio, 1975. (in Russian).
13. Ayvazyan S.A., Mhitarян V.S. *Prikladnaya Statistika i Osnovy Ekonometriki*. M.: YUNITI, 1998. (in Russian).

**Сведения об авторах:**

**Филаретов Геннадий Федорович** — доктор технических наук, профессор кафедры управления и интеллектуальных технологий НИУ «МЭИ», e-mail: gefefi@yandex.ru

**Симоненков Павел Сергеевич** — аспирант кафедры управления и интеллектуальных технологий НИУ «МЭИ», e-mail: c-mao@mail.ru

**Information about authors:**

**Filaretov Gennadiy F.** — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Control and Intelligent Technologies Dept., NRU MPEI, e-mail: gefefi@yandex.ru

**Simonenkov Pavel S.** — Ph.D-student of Control and Intelligent Technologies Dept., NRU MPEI, e-mail: c-mao@mail.ru

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

**Conflict of interests:** the authors declare no conflict of interest

**Статья поступила в редакцию:** 11.11.2019

**The article received to the editor:** 11.11.2019