

УДК 519.27

DOI: 10.24160/1993-6982-2021-1-86-94

## Многомерный алгоритм кумулятивных сумм для обнаружения изменений характеристик временных рядов

Г.Ф. Филаретов, П.С. Симоненков

Решена задача построения алгоритма кумулятивных сумм, предназначенного для обнаружения внезапного скачкообразного изменения вероятностных характеристик контролируемого временного ряда, когда изменение (разладка) связано с одновременным изменением как характеристик местоположения, так и характеристик рассеяния соответствующих функций распределения. В общем случае многомерного временного ряда разладка приводит к скачку в значениях элементов вектора математических ожиданий (вектора средних) и ковариационной матрицы. Для решения данной задачи предложено использовать предварительное линейное преобразование значений временного ряда, обеспечивающее приведение ковариационной матрицы до разладки к единичному виду, а ковариационной матрицы после разладки — к диагональному. Проанализировано как при этом изменяется вектор средних значений. Выведены основные соотношения, описывающие рассматриваемый алгоритм обнаружения. Отмечено, что использование указанного линейного преобразования упрощает процесс получения справочных данных, необходимых для синтеза контролирующего алгоритма с заданными свойствами.

Для частного случая одномерного временного ряда и разладки в виде одновременного изменения математического ожидания и дисперсии приведены полученные с помощью метода имитационного моделирования справочные данные, позволяющие по заданному значению интервала между ложными тревогами найти порог срабатывания контролирующего алгоритма и оценить среднее время запаздывания в обнаружении заданной разладки.

Работа является логическим продолжением и развитием подхода к построению многомерных алгоритмов обнаружения разладки [1].

*Ключевые слова:* многомерный алгоритм кумулятивных сумм, обнаружение одновременного изменения элементов вектора средних значений и ковариационной матрицы, линейное преобразование ковариационных матриц, одновременное изменение среднего значения и дисперсии, синтез контролирующего алгоритма.

*Для цитирования:* Филаретов Г.Ф., Симоненков П.С. Многомерный алгоритм кумулятивных сумм для обнаружения изменений характеристик временных рядов // Вестник МЭИ. 2021. № 1. С. 86—94. DOI: 10.24160/1993-6982-2021-1-86-94.

## The Multidimensional Algorithm of Cumulative Sums for Detecting Changes in Time Series Characteristics

G.F. Filaretov, P.S. Simonenkov

The article presents a cumulative sum algorithm intended to detect a sudden step-like change in the probabilistic characteristics of a monitored time series when such a change (“disorder”) is associated with a simultaneous change in both the location characteristics and the dispersion characteristics of the corresponding distribution functions. In the general case of a multidimensional time series, the disorder is associated with a jump in the values of the mathematical expectation vector (the vector of means) and covariance matrix entries. To solve this problem, it is proposed to use a preliminary linear transformation of the time series values, as a result of which the covariance matrix is transformed to the unity form before disordering and to the diagonal form after disordering. The change in the vector of means is analyzed, and the main relations describing the considered detection algorithm are derived. It is noted that by using the above-mentioned linear transformation it is possible to simplify the obtaining of the reference data necessary for synthesizing the monitoring algorithm with the predetermined properties.

As an example, a particular case of a one-dimensional time series and a disorder in the form of a simultaneous change in the mean and variance is considered. For this case, reference data obtained by applying the simulation method are given, using which it is possible to find the monitoring algorithm triggering threshold and estimate the average delay time of detecting the specified disorder from the given interval between false alarms.

This study is a logical continuation and further development of the approach to construction of multidimensional algorithms for detecting disorders [1].

*Key words:* multidimensional algorithm of cumulative sums, detection of simultaneous changes in the vector of means and covariance matrix entries, linear transformation of covariance matrices, simultaneous change in mean and variance, synthesis of a monitoring algorithm.

*For citation:* Filaretov G.F., Simonenkov P.S. The Multidimensional Algorithm of Cumulative Sums for Detecting Changes in Time Series Characteristics. Bulletin of MPEI. 2021;1:86—94. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2021-1-86-94.

## Введение

Задача оперативного обнаружения спонтанного изменения вероятностных характеристик (разладки) стохастических процессов чрезвычайно актуальна в связи с созданием и развитием систем автоматизированного мониторинга состояния контролируемого объекта в различных прикладных областях (в промышленности, медицине, экологии и др.). Все это привело к существенному росту количества публикаций по данной тематике [2], появлению новых разновидностей контролирующих алгоритмов, уточнению их свойств и возможностей.

Следует отметить, что с практической точки зрения наибольшее распространение получили различные варианты методов и алгоритмов, базирующихся на видоизмененном последовательном анализе. Чаще всего их называют алгоритмами кумулятивных сумм (АКС) или CUSUM-алгоритмами [3, 4]. Доказано, что они обладают определенными оптимальными свойствами при максимизации показателя эффективности в обнаружении разладки заданной величины  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$  для фиксированного значения среднего интервала между ложными тревогами  $\bar{T}_{\text{пр}}$  [5].

В простейшем скалярном варианте алгоритм кумулятивных сумм основан на использовании решающей функции следующего вида:

$$g_n = \max(0; g_{n-1} + z_n), \quad n = 1, 2, \dots, \quad g_0 = 0;$$

$$z_n = \ln[w_X(x_n, \theta_1)/w_X(x_n, \theta_0)], \quad (1)$$

где  $x_n$  — значения контролируемого временного ряда;  $w_X(x_n, \theta_1)$ ,  $w_X(x_n, \theta_0)$  — функции плотности распределения вероятностей  $x_n$ ;  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  — значения параметров распределения до и после появления номинальной разладки  $d(\theta_0, \theta_1)$ .

Под номинальной понимается разладка, которая должна быть обязательно обнаружена, причем максимально быстро. Сигнал о наличии разладки вырабатывается при достижении решающей функцией границы (порога)  $H$ .

Создание систем комплексного мониторинга, где контроль осуществляется сразу за несколькими взаимосвязанными процессами или за несколькими различными параметрами одного процесса, потребовало разработки соответствующих алгоритмов контроля [6 — 10]. Один из таких алгоритмов, где речь шла о разладке, связанной с изменением элементов ковариационной матрицы многомерного (векторного) процесса  $x(t)$ , подробно описан в [1]. Настоящая работа опирается на результаты, приведенные в [1], и является ее логическим продолжением для более сложного варианта разладки, когда одновременно меняются и значения математических ожиданий (средних значений), и элементы ковариационной матрицы.

## Постановка задачи исследования и вывод основных соотношений

Пусть контролируемый процесс  $x(t)$  — многомерный гауссовский временной ряд с независимыми

отсчетами и характеристиками, задаваемыми вектором-столбцом математических ожиданий  $\mathbf{m}_X$  и ковариационной матрицей  $\Sigma_X$ :

$$\mathbf{m}_X = \begin{pmatrix} m_{1X} \\ m_{2X} \\ \vdots \\ m_{vX} \end{pmatrix};$$

$$\Sigma_X = \begin{pmatrix} \sigma_{1X}^2 & \sigma_{1X}\sigma_{2X}\rho_{12} & \dots & \sigma_{1X}\sigma_{vX}\rho_{1v} \\ \sigma_{1X}\sigma_{2X}\rho_{12} & \sigma_{2X}^2 & \dots & \sigma_{2X}\sigma_{vX}\rho_{2v} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1X}\sigma_{vX}\rho_{1v} & \sigma_{2X}\sigma_{vX}\rho_{2v} & \dots & \sigma_{vX}^2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим общий случай, когда разладка состоит в одновременном скачкообразном изменении вектора математических ожиданий  $\mathbf{m}_X$  и ковариационной матрицы  $\Sigma_X$ , т. е. до разладки  $\mathbf{m}_X = \mathbf{m}_0$  и  $\Sigma_X = \Sigma_0$ , а после разладки —  $\mathbf{m}_X = \mathbf{m}_1$  и  $\Sigma_X = \Sigma_1$ , где

$$\mathbf{m}_0 = \begin{pmatrix} m_{01} \\ m_{02} \\ \vdots \\ m_{0v} \end{pmatrix};$$

$$\Sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_{01}^2 & \sigma_{01}\sigma_{02}\rho_{12}^{(0)} & \dots & \sigma_{01}\sigma_{0v}\rho_{1v}^{(0)} \\ \sigma_{01}\sigma_{02}\rho_{12}^{(0)} & \sigma_{02}^2 & \dots & \sigma_{02}\sigma_{0v}\rho_{2v}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{01}\sigma_{0v}\rho_{1v}^{(0)} & \sigma_{02}\sigma_{0v}\rho_{2v}^{(0)} & \dots & \sigma_{0v}^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{1v} \end{pmatrix};$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{11}\sigma_{12}\rho_{12}^{(1)} & \dots & \sigma_{11}\sigma_{1v}\rho_{1v}^{(1)} \\ \sigma_{11}\sigma_{12}\rho_{12}^{(1)} & \sigma_{12}^2 & \dots & \sigma_{12}\sigma_{1v}\rho_{2v}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{11}\sigma_{1v}\rho_{1v}^{(1)} & \sigma_{12}\sigma_{1v}\rho_{2v}^{(1)} & \dots & \sigma_{1v}^2 \end{pmatrix}.$$

Для произвольного  $n$ -го отсчета  $v$ -мерного временного ряда функции плотности вероятности до и после разладки  $w_X(\mathbf{x}; \mathbf{m}_0, \Sigma_0)$  и  $w_X(\mathbf{x}; \mathbf{m}_1, \Sigma_1)$  выглядят как:

$$w_X(\mathbf{x}; \mathbf{m}_0, \Sigma_0) = \frac{1}{(2\pi)^{v/2} |\Sigma_0|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_0)^T \Sigma_0^{-1} (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_0)};$$

$$w_X(\mathbf{x}; \mathbf{m}_1, \Sigma_1) = \frac{1}{(2\pi)^{v/2} |\Sigma_1|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1)^T \Sigma_1^{-1} (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1)}.$$

С учетом формулы (1) значения приращений решающей функции  $z_n$  запишем следующим образом:

$$z_n = 2\ln[w_X(\mathbf{x}; \mathbf{m}_1, \Sigma_0)/w_X(\mathbf{x}; \mathbf{m}_0, \Sigma_0)].$$

В развернутой форме:

$$z_n = (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_0)^T \Sigma_0^{-1} (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_0) - (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1)^T \Sigma_1^{-1} (\mathbf{x}_n - \mathbf{m}_1) - \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_0|}. \quad (2)$$

Для последующего анализа без потери общности целесообразно перейти к нормированной переменной  $\mathbf{x}^0(t)$ :

$$\mathbf{x}^0(t) = \left\| \frac{x_1(t) - m_{01}}{\sigma_{01}}, \frac{x_1(t) - m_{02}}{\sigma_{02}}, \dots, \frac{x_1(t) - m_{0v}}{\sigma_{0v}} \right\|^T = \|x_1^0(t), x_2^0(t), \dots, x_v^0(t)\|^T; \quad t = 1, 2, \dots$$

Для нормированной переменной вектор математических ожиданий при отсутствии разладки  $\mathbf{m}_0$  превращается в нулевой  $\mathbf{m}_0^0 = 0$ , а при наличии разладки  $\mathbf{m}_1^0$  может быть записан в виде  $\mathbf{m}_1^0 = \|\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v\|^T$ , где  $\delta_i = (m_{1i} - m_{0i})/\sigma_{0i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$  — относительная величина изменения математического ожидания. Ковариационная матрица  $\Sigma_0$  превращается в корреляционную матрицу  $\mathbf{R}_0$ , а матрица  $\Sigma_1$  может быть представлена в видоизмененной форме:

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12}^{(0)} & \dots & \rho_{1v}^{(0)} \\ \rho_{12}^{(0)} & 1 & \dots & \rho_{2v}^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{1v}^{(0)} & \rho_{2v}^{(0)} & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} k_1^2 & k_1 k_2 \rho_{12}^{(1)} & \dots & k_1 k_v \rho_{1v}^{(1)} \\ k_1 k_2 \rho_{12}^{(1)} & k_2^2 & \dots & k_2 k_v \rho_{2v}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_1 k_v \rho_{1v}^{(1)} & k_2 k_v \rho_{2v}^{(1)} & \dots & k_v^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $k_i^2 = \sigma_{1i}^2/\sigma_{0i}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, v$  — показатель кратности изменения  $i$ -й дисперсии при появлении разладки.

Для центрированных переменных формула (2) примет следующий вид:

$$z_n = \mathbf{x}_n^{0T} \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{x}_n^0 - (\mathbf{x}_n^0 - \mathbf{m}_1^0)^T \Sigma_1^{-1} (\mathbf{x}_n^0 - \mathbf{m}_1^0) - \ln \frac{|\Sigma_1|}{|\mathbf{R}_0|}. \quad (3)$$

С целью получения результатов, упрощающих возможное практическое использование рассматриваемого алгоритма, воспользуемся предложенным в [1] специальным линейным преобразованием  $\mathbf{y}(\mathbf{x}^0) = \mathbf{L}_{\text{обш}} \mathbf{x}^0$ , с помощью которого матрица  $\mathbf{R}_0$  одновременно может быть превращена в единичную матрицу  $\mathbf{I}$ , а  $\Sigma_1$  приведена к диагональному виду:

$$\Sigma_y = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_v \end{pmatrix}.$$

Следует подчеркнуть, что использование данного преобразования существенно упрощает получение

справочных данных, описывающих связь между решающим порогом  $H$ , средним интервалом между ложными тревогами  $\bar{T}_{\text{лт}}$  и средним временем запаздывания  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$  в обнаружении разладки определенной величины, что необходимо для синтеза контролирующего алгоритма с заданными характеристиками.

Для преобразованной переменной  $\mathbf{y}(\mathbf{x}^0)$  из (3):

$$z_n = \mathbf{y}_n^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{y}_n - (\mathbf{y}_n - \mathbf{m}_y)^T \Sigma_y^{-1} (\mathbf{y}_n - \mathbf{m}_y) - \ln(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_v), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{m}_y = \mathbf{L}_{\text{обш}} \mathbf{m}_1^0 = \mathbf{L}_{\text{обш}} \|\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_v\|^T = \|m_{1y}, m_{2y}, \dots, m_{vy}\|^T.$$

После ряда преобразований из (4) найдем конечную формулу для приращений  $z_n$ :

$$z_n = \mathbf{y}_n^T (\mathbf{I}^{-1} - \Sigma_y^{-1}) \mathbf{y}_n + \mathbf{m}_y^T \Sigma_y^{-1} \mathbf{y}_n + \mathbf{y}_n^T \Sigma_y^{-1} \mathbf{m}_y - \mathbf{m}_y^T \Sigma_y^{-1} \mathbf{m}_y - \ln(\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_v).$$

В развернутом виде:

$$z_n = \sum_{i=1}^v \left[ \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right) y_{in}^2 + \frac{2m_{iy} y_{in}}{\lambda_i} - \frac{m_{iy}^2}{\lambda_i} - \ln \lambda_i \right]. \quad (5)$$

Математическое ожидание  $z_n$  в данном случае равно:

$$M\{z_n\} = \sum_{i=1}^v \left\{ \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right) M\{y_{in}^2\} - \ln \lambda_i - \frac{m_{iy}^2}{\lambda_i} + \frac{2m_{iy} M\{y_{in}\}}{\lambda_i} \right\}.$$

Поскольку в отсутствии разладки  $M\{y_{in}^2\} = 1$ ,  $M\{y_{in}\} = 0$ , то для этого случая

$$M\{z_n\} = \sum_{i=1}^v \left\{ \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right) - \ln \lambda_i - \frac{m_{iy}^2}{\lambda_i} \right\}.$$

Для номинальной разладки  $M\{y_{in}^2\} = \lambda_i + m_{iy}^2$ ,  $M\{y_{in}\} = m_{iy}$ , а значит

$$M\{z_n\} = \sum_{i=1}^v \left\{ \left(1 - \frac{1}{\lambda_i}\right) (\lambda_i + m_{iy}^2) - \ln \lambda_i + \frac{m_{iy}^2}{\lambda_i} \right\} = \sum_{i=1}^v \left\{ (\lambda_i - 1) - \ln \lambda_i + m_{iy}^2 \right\}.$$

Следует отметить, что соотношение (5) является общим, содержащим в качестве частных случаев вариант разладки только по ковариационной матрице  $\Sigma_x$ , когда вектор математических ожиданий  $\mathbf{m}_x$  не изменяется, и другой вариант, когда изменяется только  $\mathbf{m}_x$  при постоянстве матрицы  $\Sigma_x = \Sigma_0$ . Действительно, для первого варианта  $m_{iy} = 0$ , и (5) приобретает вид, указанный в [1] для разладки по ковариационной матрице, а для второго варианта, когда никакого преобразования матриц не требуется и  $y_{in} = x_{in}$ , получим соотношение, аналогичное приведенному в [11].

Полученный общий результат, хотя и представляется существенным в теоретическом плане, но с практической точки зрения мало что дает для решения проблемы синтеза необходимой контролирующей процедуры даже для двумерного процесса. Это связано с тем, что для различных величин изменения вектора математических ожиданий исходного процесса  $x(t)$  фактически невозможно заранее предугадать, каков будет вектор математических ожиданий преобразованного процесса  $y(t)$ , поскольку вид такого преобразования целиком зависит от элементов матриц  $\Sigma_0$  и  $\Sigma_1$ . Поэтому заранее подготовить справочные данные для реализации процедуры синтеза контролирующего алгоритма с заданными свойствами не представляется возможным. Следует иметь в виду, что единственным инструментом получения подобных данных является метод имитационного моделирования, причем весьма сложного, в особенности, когда речь идет о многомерной разладке.

Поэтому далее рассмотрим частный случай одномерного процесса при разладке одновременно по двум параметрам: математическому ожиданию и дисперсии  $\sigma_x^2$ . Формально контролируемый процесс  $x(t)$  — одномерный, но разладка двумерная, в том смысле, что связана с изменением двух разнородных параметров: месторасположения — математического ожидания  $m_x$  и рассеяния — дисперсии  $\sigma_{1,x}^2$ . Указанный частный случай представляет несомненный практический интерес.

### Разладка одномерного процесса по математическому ожиданию и дисперсии

Положим, что в формуле (2) для значения приращений решающей функции  $z_n$ :  $x_n = x_n$ ,  $m_0 = m_0$ ,  $\Sigma_0^{-1} = (\sigma_0^2)^{-1}$ ,  $m_1 = m_1$ ,  $\Sigma_1^{-1} = (\sigma_1^2)^{-1}$ . В результате получим:

$$z_n = \frac{(x_n - m_0)^2}{\sigma_0^2} - \frac{(x_n - m_1)^2}{\sigma_1^2} - \ln \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}.$$

Введем показатели степени изменчивости математического ожидания  $\delta_m$  и дисперсии  $d$ :

$$\delta_m = \frac{|m_1 - m_0|}{\sigma_0}; \quad d = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2}.$$

Перейдя к нормированной переменной  $x_n^0 = \frac{x_n - m_0}{\sigma_0}$ ,

после несложных преобразований найдем:

$$z_n = \left(1 - \frac{1}{d}\right) (x_n^0)^2 + \left(\frac{2\delta_m}{d}\right) x_n^0 - \frac{\delta_m^2}{d} - \ln d. \quad (6)$$

Математическое ожидание  $z_n$  при отсутствии разладки, когда  $M\{(x_n^0)^2\} = 1$  и  $M\{x_n^0\} = 0$ , равно:

$$M\{z_n\} = \left(1 - \frac{1}{d}\right) - \frac{\delta_m^2}{d} - \ln d. \quad (7)$$

При наличии номинальной разладки одновременно по математическому ожиданию и дисперсии, учитывая, что  $M\{(x_n^0)^2\} = d$ , а  $M\{x_n^0\} = \delta_m$ , получим:

$$M\{z_n\} = (d-1) + \delta_m^2 - \ln d. \quad (8)$$

Соотношения (6) — (8) в качестве частных вариантов при разладке только по математическому ожиданию ( $d = 1$ ) преобразуются к виду, приведенному в [11], а при разладке только по дисперсии ( $\delta_m = 0$ ) — к виду, описанному в [12].

Для получения справочных данных, необходимых для синтеза контролирующей процедуры с заданными пользователем характеристиками, с помощью специализированного программного модуля «АКСИМ-КМД» [1] выполнен имитационный эксперимент, с помощью которого для типового набора значений  $\bar{T}_{\text{ит}}$  (500; 1000; 1500; 2000; 3000; 5000),  $\delta_m$  (0; 0,5; 1,0; 2,0) и  $d$  (1/3; 1/2,5; 1/2,0; 1/1,5; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0) найдены значения решающего порога  $H$  и среднего времени запаздывания в обнаружении номинальной разладки  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$ . Полученная информация в сжатом виде представлена в табл. 1, 2 и позволяет реализовать процедуру синтеза алгоритма контроля. Для этого пользователь должен:

- указать параметры номинальной разладки  $\delta_m$  и  $d$ ;
- выбрать подходящее значение  $\bar{T}_{\text{ит}}$ ;
- определить с помощью табл. 1 значение решающего порога  $H$ ;
- оценить быстродействие алгоритма, найдя с помощью табл. 2 величину  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$ .

С помощью информации из табл. 1, 2 можно прояснить некоторые характерные закономерности в свойствах рассматриваемого алгоритма обнаружения разладки. Продемонстрируем это на примере варианта с  $\bar{T}_{\text{ит}} = 1000$ .

Рассмотрим частный случай, когда разладка по математическому ожиданию отсутствует ( $\delta_m = 0$ ). На рисунке 1 изображены графики зависимости порога  $H$  и  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$  при вариации кратности изменения дисперсии  $k^2$  с учетом направления такого изменения в стороны увеличения ( $d = k^2 > 1$ ) и уменьшения ( $d = 1/k^2 < 1$ ).

Очевидно, что обнаружить разладку в сторону уменьшения дисперсии труднее, чем в сторону ее увеличения [12]. Этот вывод подтвержден графиками на рис. 2, 3, где даны зависимости значений  $\bar{\tau}_{\text{зап}}$  как функции от показателя кратности изменения дисперсии  $k^2$  для различных величин относительной разладки по математическому ожиданию  $\delta_m$ . При этом на рис. 2 показаны зависимости при изменении дисперсии в сторону увеличения ( $d = k^2$ ), а на рис. 3 — аналогичные кривые для случая, когда дисперсия меняется в сторону уменьшения ( $d = 1/k^2$ ).

Отмеченные характерные особенности в свойствах алгоритма обнаружения разладки имеют место и при других значениях  $\bar{T}_{\text{ит}}$ .

Для получения количественного представления о возможностях контролирующих алгоритмов и их сопоставления обычно используют показатели эффективности  $E$ :

$$E = \bar{T}_{\text{ит}} / \bar{\tau}_{\text{зап}}.$$

Сводная информация о значении показателя эффективности  $E$  для различных комбинаций  $\bar{T}_{\text{ит}}$ ,  $\delta_m$  и  $d$  приведена в табл. 3.

Таблица 1

Значения порога  $H$  для различных комбинаций  $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$ ,  $\delta_m$  и  $d$ 

| $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$ | $\delta_m$ | $d$   |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                       |            | 1/3   | 1/2,5 | 1/2   | 1/1,5 | 1,0   | 1,5   | 2,0   | 2,5   | 3,0   |
| 500                   | 0          | 19,00 | 24,31 | 33,75 | 65,37 | ×     | 46,33 | 20,68 | 13,35 | 9,87  |
|                       | 0,5        | 9,24  | 8,96  | 8,57  | 8,04  | 7,27  | 6,91  | 7,06  | 7,22  | 7,28  |
|                       | 1,0        | 9,87  | 9,76  | 9,58  | 9,32  | 8,80  | 8,20  | 7,84  | 7,68  | 7,55  |
|                       | 2,0        | 9,96  | 9,82  | 9,68  | 9,52  | 9,31  | 8,86  | 8,51  | 8,17  | 7,96  |
| 1000                  | 0          | 9,95  | 9,46  | 8,70  | 7,00  | ×     | 6,58  | 7,80  | 8,26  | 8,50  |
|                       | 0,5        | 10,57 | 10,31 | 9,98  | 9,37  | 8,59  | 8,27  | 8,36  | 8,53  | 8,60  |
|                       | 1,0        | 11,29 | 11,13 | 10,95 | 10,66 | 10,19 | 9,59  | 9,21  | 9,02  | 8,91  |
|                       | 2,0        | 11,40 | 11,27 | 11,14 | 10,95 | 10,63 | 10,24 | 9,91  | 9,56  | 9,28  |
| 1500                  | 0          | 10,73 | 10,33 | 9,48  | 7,80  | ×     | 7,31  | 8,59  | 9,07  | 9,29  |
|                       | 0,5        | 11,35 | 11,08 | 10,73 | 10,17 | 9,37  | 9,06  | 9,18  | 9,35  | 9,39  |
|                       | 1,0        | 12,07 | 11,91 | 11,80 | 11,48 | 10,97 | 10,39 | 10,05 | 9,80  | 9,71  |
|                       | 2,0        | 12,16 | 12,07 | 11,95 | 11,77 | 11,42 | 11,05 | 10,69 | 10,40 | 10,12 |
| 2000                  | 0          | 11,33 | 10,84 | 10,03 | 8,32  | ×     | 7,84  | 9,13  | 9,63  | 9,86  |
|                       | 0,5        | 11,97 | 11,67 | 11,32 | 10,74 | 9,95  | 9,59  | 9,73  | 9,89  | 9,96  |
|                       | 1,0        | 12,63 | 12,49 | 12,34 | 12,04 | 11,55 | 10,92 | 10,60 | 10,38 | 10,30 |
|                       | 2,0        | 12,70 | 12,66 | 12,55 | 12,33 | 12,02 | 11,62 | 11,22 | 10,98 | 10,70 |
| 3000                  | 0          | 12,15 | 11,60 | 10,86 | 9,11  | ×     | 8,63  | 9,96  | 10,46 | 10,66 |
|                       | 0,5        | 12,75 | 12,47 | 12,13 | 11,53 | 10,71 | 10,44 | 10,56 | 10,70 | 10,76 |
|                       | 1,0        | 13,40 | 13,31 | 13,15 | 12,81 | 12,31 | 11,77 | 11,44 | 11,20 | 11,09 |
|                       | 2,0        | 13,38 | 13,40 | 13,35 | 13,16 | 12,85 | 12,45 | 12,11 | 11,79 | 11,52 |
| 5000                  | 0          | 13,14 | 12,67 | 11,86 | 10,10 | ×     | 9,64  | 10,90 | 11,44 | 11,66 |
|                       | 0,5        | 13,80 | 13,50 | 13,13 | 12,54 | 11,77 | 11,40 | 11,56 | 11,69 | 11,80 |
|                       | 1,0        | 14,49 | 14,35 | 14,20 | 13,85 | 13,31 | 12,82 | 12,43 | 12,22 | 12,11 |
|                       | 2,0        | 14,38 | 14,37 | 14,32 | 14,17 | 13,86 | 13,45 | 13,06 | 12,77 | 12,52 |

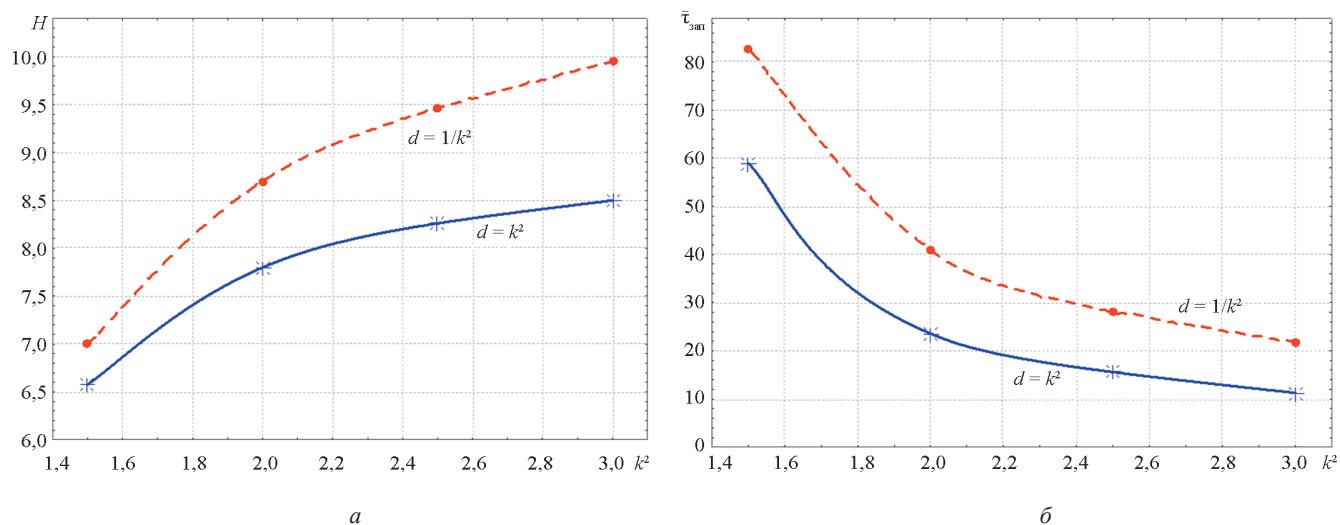
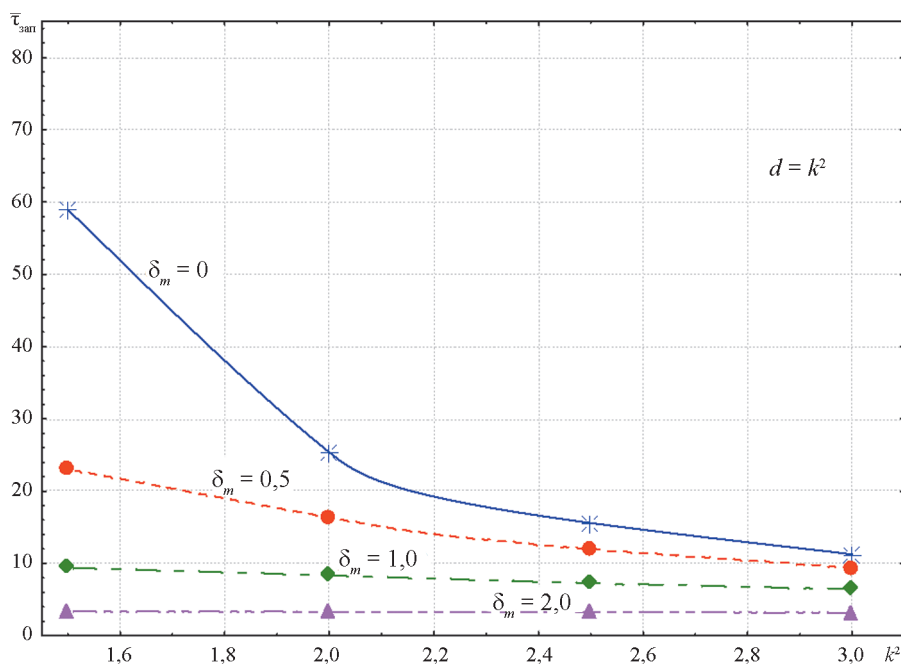
Рис. 1. Зависимости порога  $H$  и  $\bar{\tau}_{\text{зан}}$  от кратности изменения дисперсии  $k^2$

Таблица 2

Значения  $\bar{\tau}_{\text{зан}}$  для различных комбинаций  $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$ ,  $\delta_m$  и  $d$ 

| $\bar{T}_{\text{ЛТ}}$ | $\delta_m$ | $d$   |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------------|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                       |            | 1/3   | 1/2,5 | 1/2   | 1/1,5 | 1,0   | 1,5   | 2,0   | 2,5   | 3,0   |
| 500                   | 0          | 19,00 | 24,31 | 33,75 | 65,37 | ×     | 46,33 | 20,68 | 13,35 | 9,87  |
|                       | 0,5        | 13,37 | 15,53 | 18,45 | 23,13 | 26,27 | 18,95 | 13,76 | 10,36 | 8,36  |
|                       | 1,0        | 7,31  | 7,85  | 8,36  | 9,05  | 9,18  | 8,45  | 7,24  | 6,43  | 5,68  |
|                       | 2,0        | 2,81  | 2,87  | 2,90  | 2,99  | 3,06  | 3,08  | 2,96  | 2,93  | 2,91  |
| 1000                  | 0          | 21,81 | 28,24 | 40,86 | 82,7  | ×     | 58,90 | 25,37 | 15,59 | 11,26 |
|                       | 0,5        | 15,25 | 17,76 | 21,38 | 27,07 | 30,87 | 23,04 | 16,36 | 11,98 | 9,39  |
|                       | 1,0        | 8,23  | 8,87  | 9,50  | 10,27 | 10,50 | 9,41  | 8,34  | 7,27  | 6,45  |
|                       | 2,0        | 3,11  | 3,17  | 3,24  | 3,35  | 3,42  | 3,41  | 3,32  | 3,26  | 3,15  |
| 1500                  | 0          | 23,73 | 30,74 | 44,65 | 93,78 | ×     | 67,09 | 27,63 | 16,83 | 12,24 |
|                       | 0,5        | 16,50 | 19,43 | 23,31 | 29,49 | 34,29 | 25,28 | 17,44 | 12,96 | 9,85  |
|                       | 1,0        | 8,79  | 9,52  | 10,23 | 10,99 | 11,29 | 10,23 | 8,94  | 7,71  | 7,04  |
|                       | 2,0        | 3,32  | 3,35  | 3,44  | 3,54  | 3,64  | 3,60  | 3,48  | 3,39  | 3,31  |
| 2000                  | 0          | 24,95 | 32,24 | 47,98 | 99,60 | ×     | 72,61 | 29,15 | 18,03 | 13,01 |
|                       | 0,5        | 17,26 | 20,18 | 24,35 | 31,47 | 36,63 | 27,14 | 18,41 | 13,58 | 10,52 |
|                       | 1,0        | 9,25  | 9,90  | 10,69 | 11,61 | 12,05 | 10,66 | 9,26  | 8,13  | 7,28  |
|                       | 2,0        | 3,45  | 3,54  | 3,58  | 3,68  | 3,79  | 3,68  | 3,58  | 3,59  | 3,38  |
| 3000                  | 0          | 26,81 | 34,99 | 51,66 | 111,0 | ×     | 80,50 | 32,12 | 19,44 | 13,63 |
|                       | 0,5        | 18,62 | 21,78 | 26,63 | 34,17 | 39,13 | 29,50 | 20,33 | 14,78 | 11,33 |
|                       | 1,0        | 9,77  | 10,55 | 11,42 | 12,32 | 12,64 | 11,54 | 10,02 | 8,66  | 7,49  |
|                       | 2,0        | 3,60  | 3,70  | 3,79  | 3,90  | 3,96  | 3,91  | 3,87  | 3,71  | 3,66  |
| 5000                  | 0          | 29,20 | 38,22 | 57,05 | 126,2 | ×     | 93,17 | 36,08 | 20,86 | 14,95 |
|                       | 0,5        | 20,14 | 23,64 | 28,65 | 36,96 | 43,08 | 32,00 | 21,72 | 15,43 | 12,17 |
|                       | 1,0        | 10,48 | 11,29 | 12,22 | 13,33 | 13,72 | 12,59 | 10,82 | 9,36  | 8,00  |
|                       | 2,0        | 3,83  | 3,93  | 4,02  | 4,12  | 4,24  | 4,16  | 4,04  | 3,91  | 3,77  |

Рис. 2. Зависимость  $\bar{\tau}_{\text{зан}}$  от показателя кратности  $k^2$  ( $d = k^2$ )

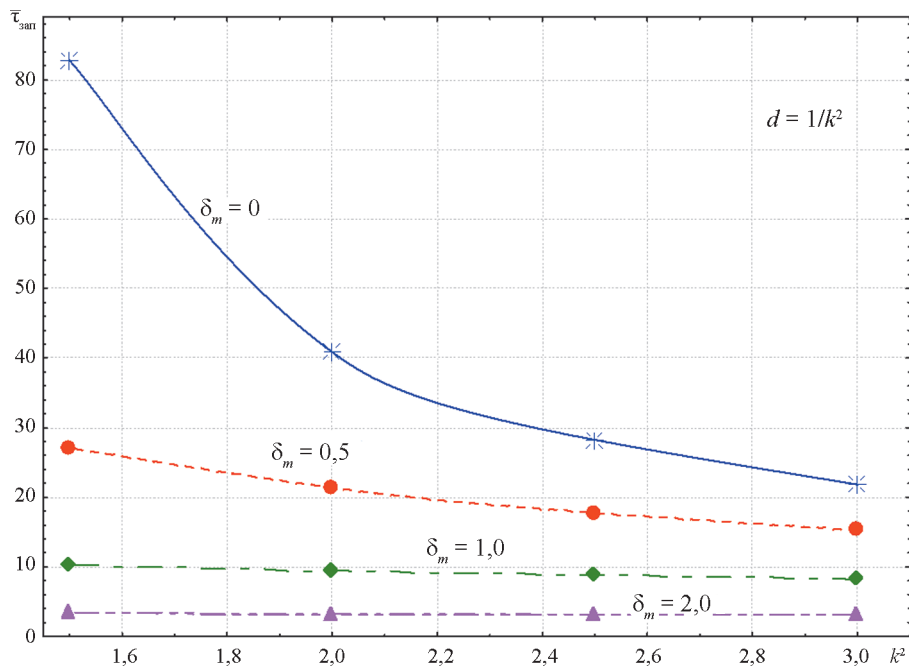
Рис. 3. Зависимость  $\bar{T}_{\text{зав}}$  от показателя кратности  $k^2$  ( $d = 1/k^2$ )

Таблица 3

Значения показателя эффективности  $E$  для различных комбинаций  $\bar{T}_{\text{ЛГ}}$ ,  $\delta_m$  и  $d$ 

| $\bar{T}_{\text{ЛГ}}$ | $\delta_m$ | $d$  |       |      |       |      |       |      |      |      |
|-----------------------|------------|------|-------|------|-------|------|-------|------|------|------|
|                       |            | 1/3  | 1/2,5 | 1/2  | 1/1,5 | 1,0  | 1,5   | 2,0  | 2,5  | 3,0  |
| 500                   | 0          | 26,3 | 20,6  | 14,8 | 7,65  | ×    | 10,8  | 24,2 | 37,5 | 50,7 |
|                       | 0,5        | 37,4 | 32,2  | 27,1 | 21,6  | 19,0 | 26,4  | 36,3 | 48,3 | 60,0 |
|                       | 1,0        | 68,4 | 63,7  | 59,8 | 55,2  | 54,5 | 59,2  | 69,1 | 77,8 | 88,0 |
|                       | 2,0        | 178  | 174   | 172  | 167   | 163  | 162   | 169  | 171  | 172  |
| 1000                  | 0          | 45,9 | 35,4  | 24,5 | 12,1  | ×    | 58,90 | 39,4 | 64,1 | 88,8 |
|                       | 0,5        | 65,6 | 56,3  | 46,8 | 36,9  | 32,4 | 43,4  | 61,1 | 83,5 | 106  |
|                       | 1,0        | 121  | 113   | 105  | 103   | 95,2 | 106   | 120  | 138  | 155  |
|                       | 2,0        | 322  | 315   | 309  | 299   | 292  | 293   | 301  | 307  | 317  |
| 1500                  | 0          | 63,2 | 48,8  | 33,6 | 16,0  | ×    | 22,4  | 54,3 | 89,1 | 123  |
|                       | 0,5        | 90,9 | 77,2  | 64,4 | 50,9  | 43,7 | 59,3  | 86,0 | 116  | 152  |
|                       | 1,0        | 171  | 158   | 147  | 136   | 133  | 147   | 116  | 195  | 213  |
|                       | 2,0        | 451  | 448   | 436  | 424   | 412  | 417   | 431  | 354  | 453  |
| 2000                  | 0          | 80,2 | 62,0  | 41,7 | 20,1  | ×    | 27,5  | 68,6 | 111  | 154  |
|                       | 0,5        | 116  | 99,1  | 82,1 | 63,6  | 54,6 | 27,4  | 109  | 147  | 190  |
|                       | 1,0        | 216  | 202   | 187  | 172   | 166  | 188   | 216  | 246  | 275  |
|                       | 2,0        | 580  | 565   | 559  | 543   | 528  | 543   | 559  | 567  | 592  |
| 3000                  | 0          | 186  | 92,8  | 58,1 | 27,0  | ×    | 37,3  | 93,4 | 154  | 220  |
|                       | 0,5        | 161  | 138   | 113  | 87,8  | 76,7 | 102   | 148  | 203  | 265  |
|                       | 1,0        | 307  | 284   | 263  | 244   | 237  | 260   | 299  | 346  | 401  |
|                       | 2,0        | 833  | 811   | 792  | 769   | 758  | 767   | 775  | 809  | 820  |
| 5000                  | 0          | 171  | 131   | 87,6 | 39,6  | ×    | 53,7  | 139  | 240  | 334  |
|                       | 0,5        | 248  | 212   | 175  | 135   | 116  | 156   | 230  | 324  | 411  |
|                       | 1,0        | 477  | 443   | 409  | 375   | 364  | 397   | 462  | 534  | 625  |
|                       | 2,0        | 1305 | 1272  | 1244 | 1214  | 1179 | 1202  | 1238 | 1279 | 1326 |

### Заключение

Рассмотрен многомерный алгоритм кумулятивных сумм, предназначенный для обнаружения скачкообразного изменения вероятностных характеристик контролируемого временного ряда, когда само изменение (разладка) связано с одновременным изменением характеристик местоположения и рассеяния соответствующих функций распределения.

Для решения поставленной задачи использовано предварительное линейное преобразование значений наблюдаемого временного ряда, обеспечивающее одновременное преобразование ковариационной матрицы до разладки к единичному виду, а ковариационной матрицы при разладке — к диагональному, с учетом

изменений, вносимых преобразованием в значения математических ожиданий.

Получены основные соотношения, описывающие рассматриваемый алгоритм обнаружения разладки.

Детально исследован частный случай одномерного временного ряда и разладки в виде одновременного изменения его математического ожидания и дисперсии. Представлены полученные с помощью метода имитационного моделирования справочные данные, позволяющие по заданному значению интервала между ложными тревогами найти порог срабатывания контролирующего алгоритма, оценить среднее время запаздывания в обнаружении заданной разладки, а также и значения показателя эффективности для различных вариантов контролирующей процедуры.

### Литература

1. **Филаретов Г.Ф., Симоненков П.С.** Алгоритм кумулятивных сумм для обнаружения изменений ковариационной матрицы многомерных временных рядов // Вестник МЭИ. 2020. № 3. С. 92—101.
2. **Shafid A.** Bibliometric Analysis of EWMA and CUSUM Control Chart Schemes // ITEE J. 2018. V. 7. Iss. 2. Pp. 1—11.
3. **Page E.S.** Continuous Inspection Schemes // Biometrika. 1954. V. 41. No. 1. Pp. 100—115.
4. **Никифоров И.В.** Последовательное обнаружения изменения свойств временных рядов. М.: Наука, 1983.
5. **Ширяев А.Н.** Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима // Доклады АН СССР. 1961. Т. 138. № 5. С. 1039—1042.
6. **Maman A., Djauhari A.** Multivariate Process Variability Monitoring Based on Individual Observations // Modern Appl. Sci. 2010. V. 4. No. 10. Pp. 91—96.
7. **Носкова А.И., Токранова М.В.** Обзор автоматизированных систем мониторинга // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2017. № 1. С. 42—47.
8. **Еремин Н.А. и др.** Информационная автоматизированная система мониторинга и анализа технологических данных объектов нефтегазодобычи // Автоматизация, телемеханизация и связь в нефтяной промышленности. 2020. № 2. С. 11—20.
9. **Funk P., Xiong N.** Why We Need to Move to Intelligent and Experience Based Monitoring and Diagnostic Systems // Proc. 23<sup>th</sup> Int. Conf. Condition Monitoring and Diagnostic Eng. Management. 2010. Pp. 111—115.
10. **Kopáček A., Kyrinovič P., Erdélyi J., Lipták I.** New Trends of Automated Bridge Monitoring // Reportson Geodesy. 2011. No. 1. Pp. 173—181.
11. **Сивова Д.Г., Филаретов Г.Ф.** Последовательный алгоритм обнаружения момента изменения характеристик векторных временных рядов // Вестник МЭИ. 2014. № 2. С. 63—69.
12. **Филаретов Г.Ф., Червова А.А.** Последовательный алгоритм обнаружения момента изменения дисперсии временного ряда // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2019. Т. 85. № 3. С. 75—82.

### References

1. **Filaretov G.F., Simonenkov P.S.** Algorithm Kumulyativnykh Summ dlya Obnaruzheniya Izmeneniy Kovariatsionnoy Matritsy Mnogomernykh Vremennykh Ryadov. Vestnik MEI. 2020;3:92—101. (in Russian).
2. **Shafid A.** Bibliometric Analysis of EWMA and CUSUM Control Chart Schemes. ITEE J. 2018;7;2:1—11.
3. **Page E.S.** Continuous Inspection Schemes. Biometrika. 1954;41;1:100—115. (in Russian).
4. **Nikiforov I.V.** Posledovatel'noe Obnaruzheniya Izmeneniya Svoystv Vremennykh Ryadov. M.: Nauka, 1983. (in Russian).
5. **Shiryayev A.N.** Zadacha Skoreyshego Obnaruzheniya Narusheniya Statsionarnogo Rezhima. Doklady AN SCSR. 1961;138;5:1039—1042. (in Russian).
6. **Maman A., Djauhari A.** Multivariate Process Variability Monitoring Based on Individual Observations. Modern Appl. Sci. 2010;4;10:91—96.
7. **Noskova A.I., Tokranova M.V.** Obzor Avtomatizirovannykh Sistem Monitoringa. Intellektual'nye Tekhnologii na Transporte. 2017;1:42—47. (in Russian).
8. **Eremin N.A. i dr.** Informatsionnaya Avtomatizirovannaya Sistema Monitoringa i Analiza Tekhnologicheskikh Dannykh Ob'ektov Neftegazodobychi. Avtomatizatsiya, Telemekhanizatsiya i Svyaz' v Neftyanoy Promyshlennosti. 2020;2:11—20. (in Russian).
9. **Funk P., Xiong N.** Why We Need to Move to Intelligent and Experience Based Monitoring and Diagnostic Systems. Proc. 23<sup>th</sup> Int. Conf. Condition Monitoring and Diagnostic Eng. Management. 2010:111—115.
10. **Kopáček A., Kyrinovič P., Erdélyi J., Lipták I.** New Trends of Automated Bridge Monitoring. Reportson Geodesy. 2011;1:173—181.
11. **Sivova D.G., Filaretov G.F.** Posledovatel'nyy Algoritm Obnaruzheniya Momenta Izmeneniya Kharakteristik Vektornykh Vremennykh Ryadov. Vestnik MEI. 2014;2:63—69. (in Russian).
12. **Filaretov G.F., Chervova A.A.** Posledovatel'nyy Algoritm Obnaruzheniya Momenta Izmeneniya Dispersii Vremennogo Ryada // Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov. 2019;85;3:75—82. (in Russian).



**Сведения об авторах:**

**Филаретов Геннадий Федорович** — доктор технических наук, профессор кафедры управления и интеллектуальных технологий НИУ «МЭИ», e-mail: gefefi@yandex.ru

**Симоненков Павел Сергеевич** — аспирант кафедры управления и интеллектуальных технологий НИУ «МЭИ», e-mail: c-mao@mail.ru

**Information about authors:**

**Filaretov Gennadiy F.** — Dr.Sci. (Techn.), Professor of Control and Intelligent Technologies Dept., NRU MPEI, e-mail: gefefi@yandex.ru

**Simonenkov Pavel S.** — Ph.D-student of Control and Intelligent Technologies Dept., NRU MPEI, e-mail: c-mao@mail.ru

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов

**Conflict of interests:** the authors declare no conflict of interest

**Статья поступила в редакцию:** 02.07.2020

**The article received to the editor:** 02.07.2020