МАТЕМАТИКА

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление (01.01.02)

УДК 004.021
DOI: 10.24160/1993-6982-2021-3-121-128

Метод регуляризации для нелинейных интегродифференциальных уравнений с нулевым оператором дифференциальной части и несколькими быстро изменяющимися ядрами

А.А. Бободжанов, М.А. Бободжанова, В.Ф. Сафонов

Рассмотрено нелинейное интегродифференциальное уравнение с нулевым оператором дифференциальной части и несколькими быстро изменяющимися ядрами. Работа является продолжением исследований, проведенных ранее для одного быстро изменяющегося ядра. Основные идеи данного обобщения и тонкости, возникающие при разработке соответствующего алгоритма метода регуляризации, полностью просматриваются в случае двух быстро изменяющихся ядер, поэтому ради сокращения выкладок взят именно этот случай. Аналогичная задача с одним спектральным значением ядра интегрального оператора проанализирована в одной из работ авторов. В этом случае сингулярности в решении задачи описываются только спектральным значением ядра. Однако влияние нулевого оператора дифференциальной части сказывается на том, что в первом приближении асимптотика решения рассматриваемой задачи не будет содержать функций пограничного слоя, а сам предельный оператор станет вырожденным (но не нулевым). Условия разрешимости соответствующих итерационных задач, как и в линейном случае, будут иметь вид не дифференциальных (как это было в задачах с ненулевым оператором дифференциальной части), а интегро-дифференциальных уравнений, причем на формирование указанных уравнений существенную роль оказывает нелинейность. Отметим, что в отличие от линейного случая в правой части изучаемой задачи отсутствует неоднородность соответствующей линейной задачи. Как было показано ранее, наличие ее в задаче повлекло бы появление в асимптотическом решении членов с отрицательными степенями малого параметра, причем в нелинейном случае таких степеней оказалось бы бесчисленное множество, а соответствующее формальное асимптотическое решение имело бы вид ряда Лорана. Это сделало бы создание алгоритма асимптотических решений проблематичным, поэтому в настоящей работе, желая оставаться в рамках асимптотических решений типа рядов Тейлора, исключена неоднородность. Кроме того, в нелинейном случае могут возникнуть так называемые резонансы, которые значительно усложняют разработку соответствующего алгоритма метода регуляризации. В настоящей публикации рассматривается нерезонансный случай. Предполагается, что исследование альтернативного варианта (более сложной резонансной задачи) будет проведено в дальнейшем.

Ключевые слова: сингулярно возмущенный, интегро-дифференциальные уравнения, регуляризация интеграла..

Для цитирования: Бободжанов А.А., Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф. Метод регуляризации для нелинейных интегродифференциальных уравнений с нулевым оператором дифференциальной части и несколькими быстро изменяющимися ядрами // Вестник МЭИ. 2021. № 3. С. 121—128. DOI: 10.24160/1993-6982-2021-3-121-128.

A Regularization Method for Nonlinear Integro-differential Equations with a Zero Operator of the Differential Part and with Several Rapidly Varying Kernels

A.A. Bobodzhanov, M.A. Bobodzhanova, V.F. Safonov

A nonlinear integro-differential equation with a zero operator in the differential part and with several rapidly varying kernels is considered. The article is a continuation of the research carried out previously for one rapidly varying kernel. The main ideas of this generalization and subtleties encountered in elaborating an appropriate regularization method algorithm are fully seen in the case of two rapidly varying kernels; therefore, to reduce the amount of calculations, exactly this case is considered. A similar problem with one spectral value of the integral operator kernel was considered in one of our papers. In this case, the singularities in the solution of the problem are only described by the kernel spectral value. However, the effect of a zero differential operator manifests itself in the fact that in a first approximation, the asymptotic behavior of the solution of the problem will not include the boundary layer functions, and the limit operator itself will become degenerated (but not zero). The solvability conditions of the corresponding iterative problems, as in the linear case, will not be in the form of differential (as was in the problems with a nonzero operator of the differential part), but in the form of integro-differential equations, with the nonlinearity playing an essential role in the derivation of these equations. It should be noted that in contrast to the linear case, the right side of the problem under study does not contain heterogeneity of the corresponding linear problem. As was shown earlier, its presence in the problem would lead to the occurrence of terms with negative powers of a small parameter in the asymptotic solution, and in the nonlinear case there would be an infinite number of such powers, and the corresponding formal asymptotic solution would have the form of the Laurent series. This would make the development of an algorithm for asymptotic solutions quite problematic; therefore, wishing to remain within the framework of asymptotic solutions such as Taylor series, we excluded inhomogeneity in this study. In addition, in the nonlinear case, so-called resonances may arise, which significantly complicate the development of the corresponding algorithm of the regularization method. In this article, the non-resonance case is considered. Supposedly, an alternative option (a more complex resonance problem) will be the subject of the future studies.

Key words: linear polynomials, integers, fully connected neural network.

For citation: Bobodzhanov A.A., Bobodzhanova M.A., Safonov V.F. A Regularization Method for Nonlinear Integro-differential Equations with a Zero Operator of the Differential Part and with Several Rapidly Varying Kernels. Bulletin of MPEI. 2021;3:121—128. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2021-3-121-128.

Эквивалентная интегродифференциальная система и ее регуляризация

Рассмотрим нелинейную сингулярно возмущенную интегродифференциальную задачу

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds+\varepsilon f\left(y,t\right),\qquad(1)$$
$$y(0,\varepsilon)=y^0,\quad t\in[0,T]$$

и разработаем алгоритм построения ее регуляризованного асимптотического решения [1 — 3] при следующих условиях:

1) $\mu_j\left(t\right)\in C^\infty\left([0,T],\mathbb{C}\right)$, $K_j(t,s)\in C^\infty(0\le s\le t\le T,\mathbb{C})$, $j=1,2$;

2) $\mu_1\left(t\right)\ne\mu_2\left(t\right)\forall t\in\left[0,T\right]$;

3) $\mu_j\left(t\right)\ne 0, \operatorname{Re}\mu_j\left(t\right)\le 0\,\forall t\in\left[0,T\right]$, $j=1,2$;

4) $f(y, t)$ — многочлен по y, т. е. $f\left(y,t\right)=\sum_{m=0}^{N}f_m\left(t\right)y^m$ с коэффициентами

$$f_m\left(t\right)\in C^\infty\left(\left[0,T\right],\mathbb{C}\right),\ m=\overline{0,N}, N<\infty$$

(функция $f(y, t)$ взята в виде многочлена ради упрощения выкладок, можно считать, что она является аналитической по y, т. е. $N=\infty$);

5) спектральные значения $\{\mu_j(t)\}$ ядра интегрального оператора таковы, что при всех $t\in[0, T]$ выполняются неравенства ($m=(m_1, m_2)$ — мультииндекс, $\mu=(\mu_1, \mu_2)$)

$$\left(m,\mu\left(t\right)\right)\equiv m_1\mu_1\left(t\right)+m_2\mu_2\left(t\right)(t)\ne 0, |\,m|\ge 2;$$
$$\left(m,\mu\left(t\right)\right)\equiv m_1\mu_1\left(t\right)+m_2\mu_2\left(t\right)(t)\ne \mu_j\left(t\right), |\,m|\ge 2, j\in 1,2$$

(т. е. рассматривается нерезонансный случай).

Аналогичная задача с одним спектральным значением $\mu_0(t)$ ядра интегрального оператора рассматривалась в [4 — 7]. В этом случае сингулярности в решении задачи описываются только спектральным значением $\mu_0(t)$. В отличие от линейного случая в правой части задачи (1) отсутствует неоднородность $h(t)$ соответствующей линейной задачи. Как было упомянуто в [5, 7], наличие ее в задаче повлекло бы появление в асимптотическом решении членов с отрицательными степенями параметра ε, причем в нелинейном случае таких степеней оказалось бы бесчисленное множество, а соответствующее формальное асимптотическое решение имело бы вид ряда Лорана. Это сделало бы разработку алгоритма асимптотических решений проблематичной, поэтому в настоящей работе, желая оставаться в рамках асимптотических решений типа рядов Тейлора, исключена неоднородность.

Перейдем к разработке алгоритма. Введем две новые неизвестные функции

$$z_j=\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds,\quad j=1,2.$$

Дифференцируя их по t, получим

$$\frac{dz_j}{dt}=K_j(t,t)y+\frac{\mu_j(t)}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}K_j(t,s)y(s,\varepsilon)ds+$$
$$+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}\frac{\partial K_j(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)ds\Leftrightarrow\varepsilon\frac{dz_j}{dt}=\mu_j(t)z_j+$$
$$+\varepsilon K_j(t,t)y+\varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_j(\theta)d\theta}\frac{\partial K_j(t,s)}{\partial t}y(s,\varepsilon)ds,\ j=1,2.$$

$$\varepsilon\frac{dw}{dt}=A(t)w+\varepsilon A_1(t)w+\varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_1(\theta)d\theta}G_1\left(t,s\right)w(s,\varepsilon)ds+$$
$$+\varepsilon\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu_2(\theta)d\theta}G_2\left(t,s\right)w(s,\varepsilon)ds+\varepsilon F\left(w,t\right),\ w(0,\varepsilon)=\begin{pmatrix}y^0\\0\\0\end{pmatrix},\qquad(2)$$

где $w=\{y,z_1,z_2\}$, $F(w,t)=\{f(y,t),0,0\}$, а матрицы $A(t)$, $A_1(t)$, $G_j(t,s)$ имеют вид

$$A(t)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&\mu_1(t)&0\\0&0&\mu_2(t)\end{pmatrix};\ A_1(t)=\begin{pmatrix}0&0&0\\K_1(t,t)&0&0\\K_2(t,t)&0&0\end{pmatrix};$$

$$G_1(t,s)=\begin{pmatrix}0&0&0\\ \dfrac{\partial K_1(t,s)}{\partial t}&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\ G_2(t,s)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\ \dfrac{\partial K_2(t,s)}{\partial t}&0&0\end{pmatrix}.$$

Поскольку спектр $\sigma(A(t))=\{0,\mu_1(t),\mu_2(t)\}$ матрицы $A(t)$ имеет два ненулевых собственных значения $\mu_j(t)$, то регуляризацию задачи (2) выполним с помощью переменных

$$\tau_j=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_j(\theta)d\theta\equiv\frac{\psi_j(t)}{\varepsilon},\ j=1,2. \tag{3}$$

Для расширения $\tilde{w}=\{y(t,\tau,\varepsilon),\ z_1(t,\tau,\varepsilon),\ z_2(t,\tau,\varepsilon)\}$ получим следующую систему

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}+\mu_1(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1}+\mu_2(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2}-A(t)\tilde{w}-\varepsilon A_1(t)\tilde{w}-\\ -\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_j(t,s)\tilde{w}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds=\\ =\varepsilon F(\tilde{w},t),\ \tilde{w}(0,0,\varepsilon)=\{y^0,0,0\},\\ (\tau=(\tau_1,\tau_2),\ \psi(t)=(\psi_1(t),\psi_1(t))).\end{gathered} \tag{4}$$

Однако задачу (4) нельзя считать полностью регуляризованной, так как в ней не проведена регуляризация интегрального оператора

$$J\tilde{w}\equiv J\left(\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon)\Big|_{t=s,\tau=\frac{\psi(s)}{\varepsilon}}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_j(t,s)\tilde{w}\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds.$$

Для регуляризации оператора $J\tilde{w}$ введем класс $M_\varepsilon=U\big|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}$, асимптотически инвариантный относительно оператора J [1, с. 62]. При этом в качестве U возьмем пространство вектор-функций $w(t,\tau)$, представляемых суммами вида

$$\begin{gathered}w(t,\tau)=w_0(t)+w_1(t)e^{\tau_1}+w_2(t)e^{\tau_2}+\sum_{|m|=2}^{N_w}w^{(m)}(t)e^{(m,\tau)};\\ w_j(t),w^{(m)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^3),\ |m|=\overline{1,N_w},\ j=\overline{0,2}.\end{gathered} \tag{5}$$

Покажем, что класс M_ε асимптотически инвариантен относительно оператора J. Для этого надо показать, что образ $Jw(t,\tau)$ на функциях вида (5) представим в виде ряда

$$Jw(t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\left(\sum_{1\le|m|\le N_{w_k}}w_k^{(m)}(t)e^{(m,\tau)}+w_0^{(0)}(t)\right)\Bigg|_{\tau=\frac{\psi(t)}{\varepsilon}}, \tag{6}$$

сходящегося асимптотически к Jw (при $\varepsilon\to+0$) равномерно по $t\in[0,T]$. Подставив (5) в $Jw(t,\tau)$, имеем

$$\begin{aligned}Jw(t,\tau)={}&\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_1(t,s)w_1(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\mu_1(\theta)d\theta}ds+\\ &+\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_2(t,s)w_2(s)e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s\mu_2(\theta)d\theta}ds+\\ &+\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}\sum_{|m|=2}^{N_w}G_j(t,s)w^{(m)}(s)\,e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s(m,\mu(\theta))d\theta}ds+\\ &+\sum_{j=1}^{2}\int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}G_j(t,s)w_0(s)ds.\end{aligned} \tag{7}$$

Применяя операцию интегрирования по частям к каждому слагаемомому этой суммы, получим следующее разложение:

$$\begin{aligned}Jw(t,\tau)={}&e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\int_0^t G_1(t,s)w_1(s)ds+e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(\theta)d\theta}\times\\ &\times\int_0^t G_2(t,s)w_2(s)ds+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\varepsilon^{\nu+1}\times\\ &\times\left\{\left[\left(I_{12}^{\nu}(G_1(t,s)w_2(s))\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(\theta)d\theta}-\right.\right.\\ &\left.-\left(I_{12}^{\nu}(G_1(t,s)w_2(s))\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}\right]+\\ &+\left[\begin{aligned}&\left(I_{21}^{\nu}(G_2(t,s)w_1(s))\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(\theta)d\theta}-\\ &-\left(I_{21}^{\nu}(G_2(t,s)w_1(s))\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(\theta)d\theta}\end{aligned}\right]+\\ &+\sum_{j=1}^{2}\left[\begin{aligned}&\left(I_{j0}^{\nu}(G_j(t,s)w_0(s))\right)_{s=t}-\\ &-\left(I_{j0}^{\nu}(G_j(t,s)w_0(s))\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t\mu_j(\theta)d\theta}\end{aligned}\right]+\\ &+\sum_{j=1}^{2}\sum_{|m|=2}^{N_w}\left[\begin{aligned}&\left(I_{m,j}^{\nu}\left(G_j(t,s)w^{(m)}(s)\right)\right)_{s=t}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[(m,\mu(\theta))]d\theta}-\\ &-\left(I_{m,j}^{\nu}\left(G_j(t,s)w^{(m)}(s)\right)\right)_{s=0}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_j(\theta)d\theta}\end{aligned}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{8}$$

где введены операторы:

$$\begin{aligned} I_{12}^0 &= \frac{1}{\mu_2(s)-\mu_1(s)};\ I_{12}^\nu = \frac{1}{\mu_2(s)-\mu_1(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{12}^{\nu-1};\\ I_{21}^0 &= \frac{1}{\mu_1(s)-\mu_2(s)};\ I_{21}^\nu = \frac{1}{\mu_1(s)-\mu_2(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{21}^{\nu-1}; \end{aligned} \tag{9}$$

$$I_{m.j}^0 = \frac{1}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)};\ I_{m.j}^\nu = \frac{1}{(m,\mu(s))-\mu_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{m.j}^{\nu-1};$$

$$I_{j0}^0 = \frac{1}{-\mu_j(s)};\ I_{j0}^\nu = \frac{1}{-\mu_j(s)}\frac{\partial}{\partial s}I_{j0}^{\nu-1};$$

$$j = 1,2, |m| = 2,3,\dots, \nu = 1,2,\dots .$$

Нетрудно доказать [2, с. 291—293], что ряд справа в (8) сходится к $Jw(t, \varepsilon)$ (при $\varepsilon \to +0$) равномерно по $t \in [0, T]$.

Введем операторы порядка (по ε) $R_m:U \to U$:

$$\begin{aligned} &R_0 w(t,\tau) = e^{\tau_1}\int_0^t G_1(t,s)w_1(s)ds + e^{\tau_2}\int_0^t G_2(t,s)w_2(s)ds;\\ &R_{\nu+1}w(t,\tau) = (-1)^\nu \Bigg\{\Bigg[\Big(I_{12}^\nu\big(G_1(t,s)w_2(s)\big)\Big)_{s=t} e^{\tau_2} -\\ &-\Big(I_{12}^\nu\big(G_1(t,s)w_2(s)\big)\Big)_{s=0} e^{\tau_1}\Bigg] +\\ &+\begin{bmatrix}\Big(I_{21}^\nu\big(G_2(t,s)w_1(s)\big)\Big)_{s=t} e^{\tau_1} -\\ -\Big(I_{21}^\nu\big(G_2(t,s)w_1(s)\big)\Big)_{s=0} e^{\tau_2}\end{bmatrix} +\\ &+\sum_{j=1}^2\begin{bmatrix}\Big(I_{j0}^\nu\big(G_j(t,s)w_0(s)\big)\Big)_{s=t} -\\ -\Big(I_{j0}^\nu\big(G_j(t,s)w_0(s)\big)\Big)_{s=0} e^{\tau_j}\end{bmatrix} +\\ &+\sum_{j=1}^2\sum_{|m|=2}^{N_w}\begin{bmatrix}\Big(I_{m,j}^\nu\big(G_j(t,s)w^{(m)}(s)\big)\Big)_{s=t} e^{(m,\tau)} -\\ -\Big(I_{m,j}^\nu\big(G_j(t,s)w^{(m)}(s)\big)\Big)_{s=0} e^{\tau_j}\end{bmatrix}\Bigg\},\\ &\nu \ge 0,\ \tau = \frac{\psi(t)}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда образ $Jw(t, \tau)$ выглядит следующим образом:

$$J\,w(t,\tau) = R_0\,w(t,\tau) + \sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m+1}R_{m+1}\,w(t,\tau), \tag{11}$$

где $\tau = \psi(t)/\varepsilon$.

Выполним расширение оператора J на рядах вида

$$\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t,\tau) \tag{12}$$

с коэффициентами $w_k(t,\tau) \in U,\ k \ge 0$.

Определение 1. Формальным расширением $\tilde{J}$ оператора J на рядах вида (12) называется оператор

$$\tilde{J}\,\tilde{w}(t,\tau,\varepsilon) \overset{def}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty}\varepsilon^\nu\sum_{s=0}^{\nu}R_{\nu-s}\,w_s(t,\tau). \tag{13}$$

Несмотря на то, что расширение $\tilde{J}$ оператора J определено формально, им вполне можно пользоваться при построении асимптотического решения конечного порядка по ε. Теперь легко выписать регуляризованную (по отношению к (1)) задачу:

$$\begin{aligned} &L_\varepsilon\tilde{w} \equiv \varepsilon\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} + \mu_1(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_1} + \mu_2(t)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tau_2} - A(t)\tilde{w} -\\ &-\varepsilon A_1(t)\tilde{w} - \varepsilon\tilde{J}\tilde{w} = \varepsilon F(\tilde{w},t),\ \tilde{w}(0,0,\varepsilon) = \left\{y^0,0,0\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Разрешимость итерационных задач

Подставив ряд (12) в (14) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим следующие итерационные задачи:

$$\begin{aligned} &L_0 w_0(t,\tau) \equiv \mu_1(t)\frac{\partial w_0}{\partial\tau_1} + \mu_2(t)\frac{\partial w_0}{\partial\tau_2} -\\ &-A(t)w_0 = 0,\ w_0(0,0) = w^0; \end{aligned} \tag{15_0}$$

$$\begin{aligned} &L_0\,w_1(t,\tau) = -\frac{\partial w_0}{\partial t} + A_1(t)w_0 +\\ &+F(w_0,t) + R_0\,w_0,\ w_1(0,0) = 0; \end{aligned} \tag{15_1}$$

$$\begin{aligned} &L_0\,w_k(t,\tau) = -\frac{\partial w_{k-1}}{\partial t} + A_1(t)w_{k-1} + P_k(w_0,\dots,w_{k-1},t) +\\ &+R_0\,w_{k-1} + R_1\,w_{k-2} + \dots + R_k\,w_{-1},\ w_k(0,0) = 0, k \ge 2, \end{aligned} \tag{15_k}$$

где $P_k(w_0, w_1,\dots,w_{k-1},t)$ — некоторый многочлен от $w_0, \dots, w_{k-1}$.

Перейдя к формулировке теорем о нормальной и однозначной разрешимости итерационных задач (15_k), вычислим собственные векторы $\varphi_j(t)$ и $\chi_j(t)$ матриц $A(t)$ и $A^*(t)$, соответственно. Нетрудно проверить, что они имеют вид

$$\begin{aligned} &\varphi_0(t) = \{1,0,0\};\ \varphi_1(t) = \left\{\frac{1}{\mu_1(t)},1,0\right\};\\ &\varphi_2(t) = \left\{\frac{1}{\mu_2(t)},0,1\right\};\ \chi_0(t) = \left\{1,-\frac{1}{\overline{\mu}_1(t)},-\frac{1}{\overline{\mu}_2(t)}\right\};\\ &\chi_1(t) = \{0,1,0\};\ \ \chi_2(t) = \{0,0,1\}, \end{aligned} \tag{16}$$

причем $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ соответствуют собственным значениям $\lambda_0(t) \equiv 0$, $\lambda_1(t) \equiv \mu_1(t)$, $\lambda_2(t) \equiv \mu_2(t)$ матрицы $A(t)$, а $\chi_0(t)$, $\chi_1(t)$, $\chi_2(t)$ — собственным значениям $\overline{\lambda}_0(t) \equiv 0, \overline{\lambda}_1(t) \equiv \overline{\mu}_1(t), \overline{\lambda}_2(t) \equiv \overline{\mu}_2(t)$ матрицы, соответственно.

Каждая из итерационных систем (15_k) имеет вид

$$L_0 w(t,\tau) \equiv \mu_1(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_1} + \mu_2(t)\frac{\partial w}{\partial\tau_2} - A(t)w = P(t,\tau), \tag{17}$$

где

$$P(t,\tau) = P_0(t) + P_1(t)e^{\tau_1} + P_2(t)e^{\tau_2} + \sum_{|m|=2}^{N_P}P^{(m)}(t)e^{(m,\tau)} \in U.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1) — 5) и* $P(t, \tau) \in U$. *Для того, чтобы система* (17) *имела решение в U, необходимо и достаточно, чтобы*

$$(P_j(t),\chi_j(t)) \equiv 0,\ j = 0,1,2,\ \forall t \in [0,T], \tag{18}$$

Здесь и далее через (,) *обозначено скалярное произведение в комплексном пространстве* $\mathbb{C}^3$.

Доказательство. Найдем решение системы (17) в виде суммы (5). Подставив (5) в (17) и приравняв отдельно коэффициенты при одинаковых $e^{(m,\tau)}$ и свободные члены, получим

$$\begin{aligned}&\left[\mu_j(t)I-A(t)\right]w_j(t)=P_j(t)\ (j=1,2),\\&-A(t)w_0(t)=P_0(t),\\&\left[(m,\mu(t))I-A(t)\right]w^{(m)}(t)=P^{(m)}(t),\ 2\le|m|\le N_w.\end{aligned}\tag{19}$$

Поскольку выполнены условия 5) отсутствия резонанса, последняя система имеет единственное решение при каждом $m(2\le|m|\le N_w)$:

$$w^{(m)}(t)=\left[(m,\mu(t))I-A(t)\right]^{-1}P^{(m)}(t),\ 2\le|m|\le N_w.\tag{20}$$

Сделаем в первых трёх системах замены переменных $w_j(t)=\Phi(t)\xi_j$, $w_0(t)=\Phi(t)\eta$, $j=1,2$, где $\Phi(t)$ = $=(\varphi_0(t),\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ — матрица из собственных векторов оператора $A(t)$. Умножив полученные системы слева на $\Phi^{-1}(t)$ и учитывая, что $(\Phi^{-1}(t))^*=\chi(t)\equiv(\chi_0(t),\chi_1(t),\chi_2(t))$ — матрица из собственных векторов сопряженного оператора $A^*(t)$, получим

$$\begin{aligned}&\left[\mu_j(t)I-\Lambda(t)\right]\xi_j(t)=\\&=\left\{(P_j(t),\chi_0(t)),(P_j(t),\chi_1(t)),(P_j(t),\chi_2(t))\right\},\ j=1,2;\\&-\Lambda\eta(t)=\left\{(P_0(t),\chi_0(t)),(P_0(t),\chi_1(t)),(P_0(t),\chi_2(t))\right\}.\end{aligned}$$

где (,) — обычное скалярное произведение в комплексном трехмерном пространстве $\mathbb{C}^3$;

$$\Lambda(t)=\mathrm{diag}\left(\mu_0(t),\mu_1(t),\mu_2(t)\right)\equiv\mathrm{diag}\left(0,\mu_1(t),\mu_2(t)\right).$$

Запишем данные системы более подробно (аргумент t везде опускаем и обозначим

$$\xi_j=\{\xi_j^1,\xi_j^2,\xi_j^3\},\ \eta=\{\eta^1,\eta^2,\eta^3\}):$$

$$\begin{pmatrix}\mu_j&0&0\\0&\mu_j-\mu_1&0\\0&0&\mu_j-\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_j^1\\\xi_j^2\\\xi_j^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(P_j,\chi_0)\\(P_j,\chi_1)\\(P_j,\chi_2)\end{pmatrix},\ j=1,2;\tag{20_j}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-\mu_1&0\\0&0&-\mu_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta^1\\\eta^2\\\eta^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(P_0,\chi_0)\\(P_0,\chi_1)\\(P_0,\chi_2)\end{pmatrix}.\tag{21}$$

Отсюда следует, что вторая строка матрицы системы (20_1) $(j=1)$ — нулевая, поэтому для разрешимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы $(P_1(t),\chi_1(t))\equiv0$, при этом $\xi_1^2(t)\equiv\alpha_1(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ — произвольная скалярная функция. Аналогично, третья строка матрицы системы (20_2) $(j=2)$ — нулевая, поэтому для разрешимости системы необходимо и достаточно, чтобы $(P_2(t),\chi_2(t))\equiv0$, при этом $\xi_2^3(t)\equiv\alpha_2(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ — произвольная скалярная функция. Поскольку в системе (21) первая строка нулевая, то для разрешимости системы необходимо и достаточно, чтобы $(P_0(t),\chi_0(t))\equiv0$, при этом $\eta^1(t)\equiv\alpha_0(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ — произвольная скалярная функция. Таким образом, для разрешимости систем (19) (а значит, и (17)) необходимо и достаточно выполнения условий (18). Теорема доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия (18), то, как это следует из (20), (20_j) и (21) (с учетом того, что $w_j(t)=\Phi(t)\xi_1$, $w_0(t)=\Phi(t)\eta$, $j=1,2$), система (17) имеет следующее решение в пространстве U:

$$\begin{aligned}w(t,\tau)=&\left[\alpha_1(t)\varphi_1(t)+\frac{(P_1(t),\chi_0(t))}{\mu_1(t)}\varphi_0(t)+\frac{(P_1(t),\chi_2(t))}{\mu_1(t)-\mu_2(t)}\varphi_2(t)\right]e^{\tau_1}+\\&+\left[\alpha_2(t)\varphi_2(t)+\frac{(P_2(t),\chi_0(t))}{\mu_2(t)}\varphi_0(t)+\frac{(P_2(t),\chi_1(t))}{\mu_2(t)-\mu_1(t)}\varphi_1(t)\right]e^{\tau_2}+\\&+\left[\alpha_0(t)\varphi_0(t)+\frac{(P_0(t),\chi_1(t))}{-\mu_1(t)}\varphi_1(t)+\frac{(P_0(t),\chi_2(t))}{-\mu_2(t)}\varphi_2(t)\right]+\\&+\sum_{|m|=2}^{N_w}\left[(m,\mu(t))I-A(t)\right]^{-1}P^{(m)}(t)\equiv\\&\equiv\sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_j(t)\varphi_j(t)+\sum_{k=0,k\ne j}^{2}p_{jk}(t)\varphi_k(t)\right]e^{\tau_j}+\\&+\alpha_0(t)\varphi_0(t)+\sum_{k=1}^{2}p_{0k}(t)\varphi_k(t)+\\&+\sum_{|m|=2}^{N_w}\left[(m,\mu(t))I-A(t)\right]^{-1}P^{(m)}(t),\end{aligned}\tag{22}$$

где $\alpha_j(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^1)$ — произвольные функции;

$$p_{jk}(t)\equiv\frac{(P_j(t),\chi_k(t))}{\mu_j(t)-\mu_k(t)},\ j,k=0,1,2.$$

Обозначим через подпространство $U^{(k)}$ пространство U однородных многочленов степени k относительно 1, e^{τ_1}, e^{τ_2}:

$$z(t,u)=\sum_{|m|=k}z^{(m)}(t)e^{(m,\tau)},$$
$$z^{(m)}(t)\in C^\infty([0,T],\mathbb{C}^3),\ |m|=k=0,1,2,...$$

с присоединенным к ним элементом $0 \equiv \sum_{|m|=k} 0\mathrm{e}^{(m,\tau)}$. В пространстве $U^{(k)}$ введем скалярное (при каждом $t \in [0, T]$) произведение

$$< w^{(k)}(t,u), z^{(k)}(t,u) > \equiv < \sum_{|m|=k} w^{(k)}(t)\mathrm{e}^{(m,\tau)}, z^{(k)}(t)\mathrm{e}^{(m,\tau)} > \overset{def}{=}$$

$$\overset{def}{=} \sum_{|m|=k} (w^{(k)}(t), z^{(k)}(t)) = \sum_{|m|=k} (w^{(k)}(t))^T \overline{z^{(k)}(t)}.$$

где (,) — обычное скалярное произведение в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$. Если $w(t, \tau)$ — элемент (5) пространства U, то через $z^{(k)}(t, u)$ обозначим сумму его слагаемых, принадлежащую пространству $U^{(k)}$.

Рассмотрим систему (17) при дополнительных условиях

$$\begin{aligned}
&w(0,0) = w^*;\\
&< -\frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} + A_1(t) w^{(1)} + R_0 w^{(1)} +\\
&+Q^{(1)}(t,\tau), \chi_j(t)\mathrm{e}^{\tau_j} > \equiv 0,\ j=1,2, \forall t \in [0,T]; \qquad (23)\\
&< -\frac{\partial w^{(0)}}{\partial t} + A_1(t) w^{(0)} + R_0 w^{(0)} +\\
&+Q^{(0)}(t,\tau), \chi_0(t) > \equiv 0 \ \ \forall t \in [0,T],
\end{aligned}$$

где

$$Q(t,\tau) = Q_1(t)\mathrm{e}^{\tau_1} + Q_2(t)\mathrm{e}^{\tau_2} + Q_0(t) + \sum_{|m|=2}^{N_P} Q^{(m)}(t)\mathrm{e}^{(m,\tau)} \in U$$

— известная функция класса U; $w^* \in \mathbb{C}^3$ — известный постоянный вектор.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1) — 5), и вектор-функция $P(t, \tau) \in U$ удовлетворяет условиям (18). Тогда система (17) при дополнительных условиях (23) однозначно разрешима в U.*

Построение решений итерационных задач

Рассмотрим первую итерационную задачу (15_0). Поскольку в ней правая часть $P = P^{(0)}(t, \tau) \equiv 0$, то условия ортогональности (18) выполнены автоматически, и задача (15_0) имеет следующее решение (см. (22):

$$w_0(t,\tau) = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j^{(0)}(t)\varphi_j(t)e^{\tau_j} + \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t). \qquad (24)$$

Условия (18) разрешимости задачи (15_1) в пространстве U приводят к следующим уравнениям относительно функций $\alpha_j^{(0)}(t)\,(j=0,1,2)$:

$$\begin{aligned}
&\dot\alpha_0^{(0)}(t) = \left(A_1(t)\varphi_0(t), \chi_0(t)\right)\alpha_0^{(0)}(t) + q_0(\alpha_0^{(0)}(t), t);\\
&\dot\alpha_1^{(0)}(t) = \left(A_1(t)\varphi_1(t) - \dot\varphi_1(t), \chi_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(t) + \qquad (25)\\
&+\int_0^t \left(G_1(t,s)\varphi_1(s), \chi_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(s)ds + q_1(t);\\
&\dot\alpha_2^{(0)}(t) = \left(A_1(t)\varphi_2(t) - \dot\varphi_2(t), \chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(t) +\\
&+\int_0^t \left(G_2(t,s)\varphi_2(s), \chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(s)ds + q_2(t),
\end{aligned}$$

где

$$q_0(\alpha_0^{(0)}(t), t) \equiv \begin{pmatrix} Q_0^{(0)}(t) - \sum_{k=1}^{2} p_{0k}^{(0)}(t)\dot\varphi_k(t) + \\ + \sum_{k=0}^{1} p_{0k}^{(0)}(t) A_1(t)\varphi_k(t), \chi_0(t) \end{pmatrix};$$

$$q_1(t) \equiv \begin{pmatrix} Q_1^{(0)}(t) - \sum_{k=0,k\neq1}^{2} p_{1k}^{(0)}(t)\dot\varphi_k(t) + \\ + \sum_{k=0,k\neq1}^{2} p_{1k}^{(0)}(t) A_1(t)\varphi_k(t) + \\ + \sum_{k=0,k\neq1}^{2} \int_0^t p_{1k}^{(0)}(s) G_1(t,s)\varphi_k(s)ds, \chi_1(t) \end{pmatrix};$$

$$q_2(t) \equiv \begin{pmatrix} Q_2^{(0)}(t) - \sum_{k=0}^{1} p_{2k}^{(0)}(t)\dot\varphi_k(t) + \\ + \sum_{k=0}^{1} p_{2k}^{(0)}(t) A_1(t)\varphi_k(t) + \\ + \sum_{k=0}^{1} \int_0^t p_{2k}^{(0)}(s) G_2(t,s)\varphi_k(s)ds, \chi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что все $p_{jk}^{(0)}(t) \equiv 0\,(j,k=0,1,2)$ и при этом

$$\begin{aligned}
&q_0^{(0)}(\alpha_0^{(0)}(t), t) \equiv Q_0^{(0)}(t) =\\
&= F^{(0)}\left(w_0(t,\tau), t\right) \equiv F\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right);\\
&q_1(t) \equiv Q_1^{(0)}(t) =\\
&= \left(\frac{\partial F\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right)}{\partial w}\varphi_1(t), \chi_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(t);\\
&q_2(t) \equiv Q_2^{(0)}(t) =\\
&= \left(\frac{\partial F\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right)}{\partial w}\varphi_2(t), \chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(t),
\end{aligned}$$

перепишем систему (25) в виде

$$\dot{\alpha}_0^{(0)}(t) = \left(A_1(t)\varphi_0(t), \chi_0(t)\right)\alpha_0^{(0)}(t) +$$
$$+F\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right);$$
$$\dot{\alpha}_1^{(0)}(t) = \left(A_1(t)\varphi_1(t), \chi_1(t) - \dot{\varphi}_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(t) +$$
$$+\int_0^t \left(G_1(t,s)\varphi_1(s), \chi_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(s)ds +$$
$$+\left(\frac{\partial F\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right)}{\partial w}\varphi_1(t), \chi_1(t)\right)\alpha_1^{(0)}(t); \qquad (26)$$
$$\dot{\alpha}_2^{(0)}(t) = \left(A_1(t)\varphi_2(t) - \dot{\varphi}_2(t), \chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(t) +$$
$$+\int_0^t \left(G_2(t,s)\varphi_2(s), \chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(s)ds +$$
$$+\left(\frac{\partial F\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right)}{\partial w}\varphi_2(t), \chi_2(t)\right)\alpha_2^{(0)}(t).$$

Начальные условия для данной системы возьмем из равенства

$$w_0(0,0) = w^0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{2}\left[\alpha_j^{(0)}(0)\varphi_j(0)\right] +$$
$$+\alpha_0^{(0)}(0)\varphi_0(0) = w^0 \Leftrightarrow \alpha_0^{(0)}(0) = \left(w^0, \chi_0(0)\right) =$$
$$= y^0, \alpha_j^{(0)}(0) = \left(w^0, \chi_j(0)\right) = 0, \ j = 1,2.$$

Учитывая, что интегродифференциальные уравнения (26) для функций $\alpha_j^{(0)}(t)\,(j=1,2)$ — однородные, установим, что $\alpha_j^{(0)}(t) \equiv 0\,(j=1,2)$. Для функции $\alpha_0^{(0)}(t)$ получим нелинейную задачу Коши (с учетом вида $A_1(t)$ и $\varphi_0(t) = \{1, 0, 0\}$)

$$\dot{\alpha}_0^{(0)}(t) = -\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{K_j(t,t)}{\mu_j(t)}\right)\alpha_0^{(0)}(t) +$$
$$+f\left(\alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t), t\right), \ \alpha_0^{(0)}(0) = y^0, \qquad (27)$$

разрешимость, в целом, которой на отрезке $[0, T]$ проблематична.

Исследование этого вопроса — самостоятельная и весьма нетривиальная задача, поэтому введем еще одно условие:

6) задача (27) разрешима на отрезке $[0, T]$.

В этом случае случае решение (27) первой итерационной задачи (15_0) будет найдено в пространстве U в виде $w_0(t,\tau) = \alpha_0^{(0)}(t)\varphi_0(t)$. Оно не содержит функций пограничного слоя. Что же касается следующих итерационных задач, то для них уравнения для функций $\alpha_j^{(k)}(t)\ (k = 1,2,3,..., j = 0,1,2)$ будут линейными, и поэтому их разрешимость в целом на отрезке $[0, T]$ очевидна.

Замечание 2. В действительном случае задачи (1) условие 6) будет выполнено [8, с. 412—413], если потребовать, чтобы существовала постоянная γ, такая, что при всех $(t,y) \in [0,T] \times R^1$ имеет место неравенство

$$-\left(\sum_{j=1}^{2}\frac{K_j(t,t)}{\mu_j(t)}\right) + \frac{\partial f(y,t)}{\partial y} \le \gamma. \qquad (28)$$

Это неравенство выполняется, например, для задачи

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = \int_0^t e^{\frac{s-t}{\varepsilon}} K_1(t,s)\,y(s,\varepsilon)ds +$$
$$+\int_0^t e^{\frac{\sqrt{2}(s-t)}{\varepsilon}} K_2(t,s)\,y(s,\varepsilon)ds - 2y^3, \ y(0,\varepsilon) = y^0.$$

Неравенство (28) в данном случае имеет вид:

$$K_1(t,t) + \frac{1}{\sqrt{2}}K_2(t,t) - 6y^2 \le \gamma \Leftrightarrow -6y^2 \le$$
$$\le \gamma - \left(K_1(t,t) + \frac{1}{\sqrt{2}}K_2(t,t)\right).$$

Оно выполняется, если взять постоянную $\gamma > 0$ так, чтобы $\gamma > \max\limits_{t\in[0,T]}\left|K_1(t,t) + \frac{1}{\sqrt{2}}K_2(t,t)\right|$. При этом задача (27) будет иметь следующее решение:

$$\alpha_0^{(0)}(t) = \frac{\sqrt{\left(4\left(\int_0^t\left(e^{\int_0^s m(s)\,ds}\right)^2 ds\right)\left(y^0\right)^2 + 1\right)e^{2\left(\int_0^t m(s)\,ds\right)}}\ y^0}{4\left(\int_0^t\left(e^{\int_0^s m(s)\,ds}\right)^2 ds\right)y_0^2 + 1},$$

где $m(t) \equiv K_1(t,t) + \frac{1}{\sqrt{2}}K_2(t,t)$.

При условиях 1) — 6) построим ряд (12) с коэффициентами $w_k(t, \tau) \in U$, также как и в [7], докажем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть для системы* (2) *выполнены условия* 1) — 6). *Тогда при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($\varepsilon_0 > 0$ — *достаточно мало) система* (2) *имеет единственное решение* $w(t,\varepsilon) \in C^1([0,T], \mathbb{C}^3)$, *и имеет место оценка*

$$\| w(t,\varepsilon) - w_{\varepsilon N}(t) \|_{C[0,T]} \le c_N \varepsilon^{N+1}, N = 0,1,2,...,$$

где $w_{\varepsilon N}(t)$ — *сужение (при* $\tau = \psi(t)/\varepsilon$*)* N*-й частичной суммы ряда (12)* (*с коэффициентами* $w_k(t,\tau) \in U$*, удовлетворяющими итерационным задачам* (16_k)*), а постоянная* $c_N > 0$ *не зависит от* ε *при* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Поскольку решение $y(t, \varepsilon)$ исходной задачи (1) является первой компонентой вектор-функции $w(t, \varepsilon)$, то для него (при условиях 1) — 6)) также справедлива оценка

$$\| y(t,\varepsilon) - y_{\varepsilon N}(t) \|_{C[0,T]} \le c_N \varepsilon^{N+1}, N = 0,1,2,...;$$

$c_N > 0$ не зависит от ε при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Литература

1. **Ломов С.А.** Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
2. **Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.** Курс высшей математики. Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации. М.: Издат. дом МЭИ, 2012.
3. **Ломов С.А., Ломов И.С.** Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Московского ун-та им. М.В. Ломонсова, 2011.
4. **Бободжанова М.А.** Сингулярно возмущенные интегродифференциальные системы с нулевым оператором дифференциальной части // Вестник МЭИ. 2010. № 6. С. 63—72.
5. **Бободжанова М.А., Сафонов В.Ф.** Асимптотический анализ сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем с нулевым оператором дифференциальной части // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 4. С. 519—536.
6. **Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.** Интегральные уравнения Вольтерра с быстро изменяющимися ядрами и их асимптотическое интегрирование // Математический сборник. 2001. Т. 192. № 8. С. 53—78.
7. **Бободжанова М.А.** Обоснование алгоритма метода регуляризации для нелинейных интегродифференциальных уравнений с нулевым оператором дифференциальной части // Вестник МЭИ. 2011. № 6. С. 85—95.
8. **Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.** Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 1994.

References

1. **Lomov S.A.** Vvedenie v Obshchuyu Teoriyu Singulyarnykh Vozmushcheniy. M.: Nauka, 1981. (in Russian).
2. **Safonov V.F., Bobodzhanov A.A.** Kurs Vysshey Matematiki. Singulyarno Vozmushchennye Zadachi i Metod Regulyarizatsii. M.: Izdat. Dom MEI, 2012. (in Russian).
3. **Lomov S.ноA., Lomov I.S.** Osnovy Matematicheskoy Teorii Pogranichnogo Sloya. M.: Izd-vo Moskovskogo Un-ta im. M.V. Lomonsova, 2011. (in Russian).
4. **Bobodzhanova M.A.** Singulyarno Vozmushchennye Integrodifferentsial'nye Sistemy s Nulevym Operatorom Differentsial'noy Chast. Vestnik MEI. 2010;6:63—72. (in Russian).
5. **Bobodzhanova M.A., Safonov V.F.** Asimptoticheskiy Analiz Singulyarno Vozmushchennykh Integrodifferentsial'nykh Sistem s Nulevym Operatorom Differentsial'noy Chasti. Differentsial'nye Uravneniya. 2011;47;4: 519—536. (in Russian).
6. **Bobodzhanov A.A., Safonov V.F.** Integral'nye Uravneniya Vol'terra s Bystro Izmenyayushchimisya Yadrami i Ikh Asimptoticheskoe Integrirovanie. Matematicheskiy Sbornik. 2001;192;8:53—78. (in Russian).
7. **Bobodzhanova M.A.** Obosnovanie Algoritma Metoda Regulyarizatsii dlya Nelineynykh Integrodifferentsial'nykh Uravneniy s Nulevym Operatorom Differentsial'noy Chast. Vestnik MEI. 2011;6:85—95. (in Russian).
8. **Amosov A.A., Dubinskiy Yu.A., Kopchenova N.V.** Vychislitel'nye Metody dlya Inzhenerov. M.: Vysshaya Shkola, 1994. (in Russian).

Сведения об авторах:

Бободжанов Абдухафиз Абдурасулович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: BobojanovA@mpei.ru
Бободжанова Машхура Абдухафизовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: BobojanovaMA@mpei.ru
Сафонов Валерий Федорович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики НИУ «МЭИ», e-mail: SafonovVF@mpei.ru

Information about authors:

Bobodzhanov Abdukhafiz A. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: BobojanovA@mpei.ru
Bobodzhanova Mashkhura A. — Ph.D. (Phys.-Math.), Assistant Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: BobojanovaMA@mpei.ru
Safonov Valeriy F. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Higher Mathematics Dept., NRU MPEI, e-mail: SafonovVF@mpei.ru

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *16.03.2020*
The article received to the editor: *16.03.2020*