1.1. МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Дифференциальные уравнения и математическая физика (1.1.2)

УДК 517.956.4
DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-145-149

О решении начально-краевых задач для параболического уравнения в классах Дини

И.В. Женякова, М.Ф. Черепова

Метод потенциалов — один из классических методов решения начально-краевых задач для параболических уравнений и систем. Его основу составляет исследование гладкости параболических потенциалов в различных функциональных пространствах, а также изучение разрешимости соответствующих интегральных уравнений и систем, к которым сводятся поставленные задачи. Он позволяет находить конструктивный вид решений начально-краевых задач и непосредственно исследовать гладкость решений.

Настоящая работа продолжает серию работ по построению теории разрешимости параболических начально-краевых задач в областях с негладкими по временной переменной боковыми границами.

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи с нулевым начальным условием для одномерного по пространственной переменной равномерно параболического уравнения. Предполагается, что коэффициенты уравнения ограничены и равномерно непрерывны с модулем непрерывности, удовлетворяющим дважды условию Дини. Особенность работы состоит в том, что правая часть уравнения может расти к бесконечности определенным образом при приближении к прямой задания начальных данных. Установлена разрешимость (в классическом смысле) данных задач в полуограниченной криволинейной области на плоскости с негладкой боковой границей из класса Дини—Гёльдера, допускающей, в частности, «клювы». Решение построено в виде суммы плоского параболического потенциала и потенциала простого слоя, ядром которых является фундаментальное решение уравнения. Исследована гладкость решения указанных задач в классах Дини—Гёльдера и получены соответствующие оценки корректности, характеризующие поведение решений и их пространственной производной первого порядка в замыкании области. Полученные результаты можно использовать для изучения процессов тепло- и массопереноса.

В качестве доказательства исследована гладкость в пространстве Дини—Гёльдера плоского параболического потенциала с неограниченной плотностью класса Дини в криволинейной области с негладкой боковой границей. Полученный результат может быть использован при решении других начально-краевых задач для неоднородного параболических уравнения.

Ключевые слова: параболическое уравнение, начально-краевые задачи, классическое решение, метод потенциалов, модуль непрерывности.

Для цитирования: Женякова И.В., Черепова М.Ф. О решении начально-краевых задач для параболического уравнения в классах Дини // Вестник МЭИ. 2022. № 5. С. 145—149. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-145-149.

On Solving Initial Boundary Value Problems for a Parabolic Equation in Dini Classes

I.V. Zhenyakova, M.F. Cherepova

The method of potentials is one of the classical methods for solving initial boundary value problems for parabolic equations and systems. The method is based on studying the smoothness of parabolic potentials in various functional spaces and studying the solvability of the corresponding integral equations and systems to which the problems are reduced. This method allows one to find a constructive form of solutions to initial-boundary value problems and directly investigate the smoothness of solutions.

This article continues a series of works on constructing the solvability theory of parabolic initial boundary value problems in domains with nonsmooth lateral boundaries in the time variable. The article considers the first and second initial boundary value problems with zero initial condition for a uniformly parabolic equation that is one-dimensional in the spatial variable. It is assumed that the equation coefficients are bounded and uniformly continuous with a modulus of continuity satisfying twice the Dini condition. The specific feature of the study is that the right side of the equation can grow to infinity in a certain way when approaching the initial data assignment line. The solvability (in the classical sense) of these problems is established in a semi-bounded curvilinear domain in a plane with a nonsmooth lateral boundary from the Dini-Hölder class, admitting, in particular, so-called "beaks". The solution is constructed as a sum of the plane parabolic potential and the single layer potential, the kernel of which is the fundamental solution of the equation. The smoothness of the solution of these problems in the Dini-Hölder classes is investigated, and the corresponding correctness estimates are obtained. These estimates characterize the behavior of solutions and their first-order spatial derivative in the closure of the domain. The results obtained can be used to study heat and mass transfer processes.
For the proof, the smoothness in the Dini-Hölder space of a plane parabolic potential with an unlimited density of the Dini class in a curvilinear domain with a nonsmooth lateral boundary is investigated. The obtained result can be used in solving other initial boundary value problems for an inhomogeneous parabolic equation.

Key words: parabolic equation, initial boundary value problems, regular solution, method of potentials, modulus of continuity.

For citation: Zhenyakova I.V., Cherepova M.F. On Solving Initial Boundary Value Problems for a Parabolic Equation in Dini Classes. Bulletin of MPEI. 2022;5:145—149. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-145-149.

Введение

Рассмотрены первая и вторая начально-краевые задачи с нулевым начальным условием для одномерного по пространственной переменной параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами. Предполагается, что правая часть f уравнения может расти к бесконечности определенным образом при приближении к прямой задания начальных данных. Установлена разрешимость (в классическом смысле) этих задач в полуограниченной области с негладкой боковой границей из класса Дини–Гёльдера. Исследована гладкость решения задач в классах Дини–Гёльдера и получены соответствующие оценки корректности.

Если правая часть f уравнения ограничена, то разрешимость указанных задач получена в [1] при более сильных условиях на характер гладкости коэффициентов уравнения, боковой границы области и функций из граничных условий. Если $f \equiv 0$, то результаты работы следуют из [2, 3]. В случае, когда данные этих задач принадлежат пространствам Гёльдера и f растет к бесконечности степенным образом при $t \to +0$, разрешимость задач и оценки решений в классах Гёльдера установлены в [4].

В полосе $D = \{(x, t)\in\mathbb{R}\times(0, T)\}$, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $0 < T< +\infty$, задан линейный равномерно параболический оператор

$$Lu = \partial_t u - a_2(x,t)\partial_x^2 u + a_1(x,t)\partial_x u + a_0(x,t)u,$$

где $\partial_t = \partial/\partial t$; $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$; $\partial x = \partial/\partial x$.

Предположим, что коэффициенты оператора L — вещественные функции, удовлетворяющие условиям:

а) $a_2(x, t) \geq \delta_0 > 0$ для некоторого $\delta_0 > 0$ и всех $(x, t) \in \bar{D}$;

б) функции $a_k(x, t)$, $k = 0, 1, 2$, ограничены в $\bar{D}$;

в) $\left|a_k(x+\Delta x, t+\Delta t) - a_k(x,t)\right| \leq \omega_0\left(|\Delta x| + |\Delta t|^{1/2}\right)$;

$$(x+\Delta x, t+\Delta t),\ (x,t)\in\bar{D},\ k = 0,\ 1,\ 2,$$

где ω_0 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условиям:

$$\tilde{\tilde{\omega}}_0(z) = \int_0^z y^{-1}dy\int_0^y \omega_0(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty,\ z > 0, \qquad (1.1)$$

и для некоторого $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ функция $\omega_0(z)z^{-\varepsilon_0}$, $z > 0$, почти убывает.

Функцию $v(z)$ называют почти убывающей, если для некоторой постоянной $C > 0$ выполняется неравенство $v(z_1) \leq Cv(z_2)$ при $z_1 \geq z_2$. Следуя [5], модулем непрерывности назовем функцию $\omega:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям: $\omega(0) = 0$, ω — непрерывна, не убывает и полуаддитивна на $[0, +\infty)$, т. е.

$$\omega(z_1+z_2) \leq \omega(z_1) + \omega(z_2),\ 0 \leq z_1, z_2 < +\infty.$$

Модуль непрерывности ω удовлетворяет условию Дини, если

$$\tilde{\omega}(z) = \int_0^z \omega(\xi)\xi^{-1}d\xi < +\infty,\ z > 0.$$

Отметим, что если ω — модуль непрерывности, то $\tilde{\omega}$ — также модуль непрерывности. Условие (1.1) означает, что модуль непрерывности $\tilde{\omega}_0$ удовлетворяет условию Дини.

Известно (см. [6]), что при условиях а) — в) существует фундаментальное решение

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau),\ (x,t;\xi,\tau)\in\bar{D}\times\bar{D}\cap\{t>\tau\}$$

уравнения $Lu = 0$.

В полосе D выделим полуограниченную область $\Omega = \{(x,t)\in D: x > g(t)\}$ с негладкой, вообще говоря, боковой границей $\Sigma = \{(x, t)\in \bar{\Omega}: x = g(t)\}$. Функция g удовлетворяет условию

$$\begin{gathered}\left|g(t+\Delta t) - g(t)\right| \leq K|\Delta t|^{1/2}\,\omega_1\left(|\Delta t|^{1/2}\right);\\ t, t+\Delta t\in[0,T],\ K > 0,\end{gathered} \qquad (1.2)$$

где ω_1 — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини, и для некоторого $\varepsilon_1\in (0, 1)$ функция $\omega_1(z)z^{-\varepsilon_1}$, $z > 0$, почти убывает.

В области Ω рассмотрим задачу поиска классического решения уравнения

$$Lu = f \text{ в } \Omega, \tag{1.3}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = 0 \text{ при } x \geq g(0) \tag{1.4}$$

и одному из граничных условий

$$u(g(t), t) = \psi(t),\ t \in [0, T], \tag{1.5}$$

или

$$\partial_x u(g(t), t) = \theta(t),\ t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

Определим следующие функциональные пространства. Через $\underset{0}{C}\left[0,T\right]$ обозначим пространство непрерывных функций φ:[0, T]→$\mathbb{R}$, для которых $\varphi(0) = 0$, при этом $\left\|\varphi;\left[0,T\right]\right\|^0 = \max\limits_{[0,T]}|\varphi|$.

Пусть ω — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию:

$$\begin{gathered}\text{для некоторого } \varepsilon \in (0,1)\\ \text{функция } \omega(z)z^{-\varepsilon},\ z > 0, \text{ почти убывает.}\end{gathered} \tag{1.7}$$

Пространством $H^\omega[0, T]$, $0 < T < +\infty$, назовем пространство непрерывных функций φ: [0, T] → $\mathbb{R}$, для которых конечна величина

$$\left\|\varphi;\left[0,\mathrm{T}\right]\right\|^{\omega} = \max_{[0,\mathrm{T}]}\left|\varphi\left(t\right)\right| + \sup_{[0,\mathrm{T}]}\frac{\left|\varphi\left(t+\Delta t\right)-\varphi\left(t\right)\right|}{\omega\left(\left|\Delta t\right|^{1/2}\right)}.$$

Обозначим $\underset{0}{H}^{\omega}\left[0,T\right] = \left\{\varphi \in H^{\omega}\left[0,T\right] : \varphi\left(0\right)=0\right\}$.

Замечание 1. Для любой непрерывной на [0, T] функции φ существует модуль непрерывности ω, удовлетворяющий условию (1.7) и такой, что $\left\|\varphi:\left[0,\mathrm{T}\right]\right\|^{\omega} < +\infty$ (см. [7]). Другими словами, пространства $H^\omega[0, T]$ и C[0, T] непрерывных на [0, T] функций с нормой $\|\varphi:[0, T]\|^0$ отличаются только нормами.

Через $\underset{0}{H}^{\frac{1}{2}+\omega}\left[0,T\right]$ обозначим пространство функций $\psi \in \underset{0}{C}\left[0,T\right]$, для которых конечна величина

$$\left\|\psi;\left[0,T\right]\right\|^{\frac{1}{2}+\omega} = \left\|\psi;\left[0,T\right]\right\|^{0} + \sup_{[0,\mathrm{T}]}\frac{\left|\psi\left(t+\Delta t\right)-\psi\left(t\right)\right|}{\left|\Delta t\right|^{1/2}\omega\left(\left|\Delta t\right|^{1/2}\right)}.$$

Через $H^{1,\omega}(\overline{\Omega})$ обозначим пространство функций u:$\overline{\Omega}$ →$\mathbb{R}$, непрерывных и ограниченных в $\overline{\Omega}$ вместе с производной $\partial_x u$, для которых конечна величина

$$\begin{aligned}\left\|u;\Omega\right\|^{1,\omega} &= \sup_{\Omega}\left|u\left(x,t\right)\right| + \sup_{\Omega}\left|\partial_x u\left(x,t\right)\right| + \\ &+ \sup_{\Omega}\frac{\left|u\left(x,t+\Delta t\right)-u\left(x,t\right)\right|}{\left|\Delta t\right|^{1/2}\omega\left(\left|\Delta t\right|^{1/2}\right)} + \\ &+ \sup_{\Omega}\frac{\left|\partial_x u\left(x+\Delta x,t+\Delta t\right)-\partial_x u\left(x,t\right)\right|}{\omega\left(\left|\Delta x\right|+\left|\Delta t\right|^{1/2}\right)}.\end{aligned}$$

Под значениями функций и их производных на границе области Ω понимаем их предельные значения «изнутри» Ω.

Через $C^{\,0}_{1,\omega}(\Omega)$ обозначим весовое пространство непрерывных функций u:Ω → $\mathbb{R}$, для которых конечна величина

$$\left\|u;\Omega\right\|^{0}_{1,\omega} = \sup_{\Omega}\frac{t^{1/2}\left|u\left(x,t\right)\right|}{\omega\left(t^{1/2}\right)}.$$

Функции из пространства $C^{\,0}_{1,\omega}(\Omega)$ могут расти к бесконечности определенным образом при $t \to +0$.

Рассмотрим первую начально-краевую задачу (1.3) — (1.5). Предположим, что выполнены условия:

1) $$f \in C^{\,0}_{1,\omega_f}(\Omega) \tag{1.8}$$

для некоторого модуля непрерывности ω_f, удовлетворяющего условию Дини;

2) для каждой точки $(x_0, t_0) \in \Omega$ существуют постоянные C, $\beta > 0$, зависящие от x_0 и t_0, такие, что для всех точек (x, t), $(x + \Delta x,t) \in \Omega$, удовлетворяющих условиям $|x - x_0| \leq \beta$, $|\Delta x| \leq \beta$, $|t - t_0| \leq \beta$, выполняется неравенство

$$\left|f\left(x+\Delta x,t\right)-f\left(x,t\right)\right| \leq C\left(x_0,t_0\right)\sigma\left(\Delta x\right), \tag{1.9}$$

где σ — модуль непрерывности, удовлетворяющий условию Дини;

3) $$\psi \in \underset{0}{H}^{\frac{1}{2}+\omega_\psi}\left[0,T\right] \tag{1.10}$$

для некоторого модуля непрерывности ω_ψ, удовлетворяющего условию Дини.

Сведем задачу (1.3) — (1.5) к задаче для однородного уравнения. Для этого воспользуемся плоским параболическим потенциалом

$$Vf\left(x,t\right) = \int_0^t d\tau \int_{g(\tau)}^{+\infty}\Gamma\left(x,t;\xi,\tau\right)f\left(\xi,\tau\right)d\xi, \left(x,t\right) \in \overline{\Omega}, \tag{1.11}$$

где $\Gamma(x, t; \xi, \tau)$ — фундаментальное решение уравнения $Lu = 0$. Если f удовлетворяет условиям (1.8) и (1.9), то потенциал (1.11) удовлетворяет уравнению (1.3) и начальному условию (1.4). Тогда для функции $w = u - Vf$ получим задачу

$$\begin{gathered}Lw = 0 \text{ в } \Omega;\ w(x, 0) = 0 \text{ при } x \geq g(0);\\ w(g(t), t)) = \Psi(t);\ t\in[0, T],\end{gathered} \tag{1.12}$$

где $\Psi(t) = \psi(t) - Vf(g(t), t)$.

Лемма 1. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия а) — в) и для кривой Σ — условие* (1.2). *Пусть ω_f — модуль непрерывности такой, что для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$ функция $\omega_f(z)z^{-\varepsilon}$, $z > 0$ почти убывает. Тогда Vf — ограниченный оператор из $C^{\,0}_{1,\omega_f}(\Omega)$ в $H^{1,\omega_f}(\overline{\Omega})$.*

Доказательство леммы аналогично доказательству теоремы 3.1 в [8].

Из леммы 1 и условия (1.10) следует, что $\Psi \in \underset{0}{H}^{\frac{1}{2}+\omega_2}\left[0,T\right]$ и выполнено неравенство

$$\left\|\Psi;\left[0,T\right]\right\|^{\frac{1}{2}+\omega_2} \le C\left(\left\|f;\Omega\right\|^{0}_{1,\omega_f}+\left\|\psi;\left[0,T\right]\right\|^{\frac{1}{2}+\omega_\psi}\right), \quad (1.13)$$

где $\omega_2 = \omega_f + \omega_\psi$, причем ω_2 удовлетворяет условию Дини. Через C обозначим положительные постоянные, зависящие от δ_0, T, функции g и коэффициентов оператора L. Из [2] вытекает, что решением задачи (1.12) является потенциал простого слоя

$$w\left(x,t\right)=U\varphi\left(x,t\right)\equiv\int\limits_0^t\Gamma\left(x,t;g\left(\tau\right),\tau\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau,\ \left(x,t\right)\in\bar{\Omega},$$

где плотность $\varphi \in \underset{0}{C}\left[0,T\right]$ — единственное в $C[0, T]$ решение интегрального уравнения Вольтерры 1-го рода

$$\int\limits_0^t\Gamma\left(g\left(t\right),t;\ g\left(\tau\right),\tau\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau=\Psi\left(t\right),\ t\in\left[0,T\right]. \quad (1.14)$$

Кроме того, $w\in H^{1,\omega_3}\left(\bar{\Omega}\right)$, $\omega_3=\tilde{\tilde{\omega}}_0+\tilde{\omega}_1+\tilde{\omega}_2$, и выполнена оценка

$$\left\|w\ ;\Omega\right\|^{1,\omega_3}\le C\left\|\Psi;\left[0,T\right]\right\|^{\frac{1}{2}+\omega_2}.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для коэффициентов оператора L выполнены условия а) — в) и для кривой Σ — условие (1.2). Тогда для любых функций f и ψ, удовлетворяющих условиям (1.8) — (1.10), существует классическое решение задачи (1.3) — (1.5), причем $u \in H^{1,\omega_4}(\bar{\Omega})$ и выполнена оценка*

$$\left\|u;\Omega\right\|^{1,\omega_4}\le C\left(\left\|f;\Omega\right\|^{0}_{1,\omega_f}+\left\|\psi;\left[0,T\right]\right\|^{\frac{1}{2}+\omega_\psi}\right),$$

где $\omega_4=\tilde{\tilde{\omega}}_0+\tilde{\omega}_1+\tilde{\omega}_f+\tilde{\omega}_\psi$

Замечание 2. Единственность решения задачи (1.3) — (1.5) следует из принципа максимума (см. [9]).

Замечание 3. Как показано выше, решение задачи (1.3) — (1.5) имеет вид суммы потенциалов

$$u(x, t) = Vf(x, t) + U\varphi(x, t), \quad (1.15)$$

где φ — единственное в $C[0, T]$ решение интегрального уравнения (1.14).

Аналогично установим разрешимость задачи (1.3), (1.4), (1.6). Используя лемму 1 и результаты [3, 10], получим следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия а) — в), (1.2). Тогда для любой функции $f\in C^0_{1,\omega_f}\left(\Omega\right)$, удовлетворяющей условию (1.9), и любой функции $\theta\in \underset{0}{H}^{\omega_\theta}\left[0,T\right]$ существует классическое решение задачи (1.3), (1.4), (1.6), причем $u\in H^{1,\omega_5}\left(\bar{\Omega}\right)$ и выполнена оценка*

$$\left\|u;\Omega\right\|^{1,\omega_5}\le C\left(\left\|f;\Omega\right\|^{0}_{1,\omega_f}+\left\|\theta;\left[0,T\right]\right\|^{\omega_\theta}\right),$$

где $\omega_5=\tilde{\tilde{\omega}}_0+\tilde{\omega}_1+\omega_f+\omega_\theta$.

Замечание 4. Единственность решения задачи (1.3), (1.4), (1.6) получена в [11].

Замечание 5. Решение задачи (1.3), (1.4), (1.6) имеет вид суммы потенциалов (1.15), где плотность $\varphi\in \underset{0}{C}\left[0,T\right]$ — единственное в $C[0, T]$ решение интегрального уравнения Вольтерры 2-го рода

$$-\frac{1}{2}a_2^{-1}\left(g\left(t\right),t\right)\varphi\left(t\right)+$$
$$+\int\limits_0^t\partial_x\Gamma\left(g\left(t\right),t;g\left(\tau\right),\tau\right)\varphi\left(\tau\right)d\tau=\Theta\left(t\right),\ t\in\left[0,T\right],$$

где $\Theta(t) = \theta(t) - \partial_x Vf(g(t), t)$.

Замечание 6. В частном случае, когда $\omega_k(z) = z^\alpha$, $k = 0,1$; $\omega_f = \omega_\psi = \omega_\theta = z^\alpha$; $0 < \alpha < 1$, утверждения теорем 1 и 2 следуют из [4].

Заключение

Установлена разрешимость первой и второй начально-краевых задач для одномерного параболического уравнения с Дини-непрерывными коэффициентами в полуограниченной области с негладкой боковой границей из класса Дини–Гёльдера при условии, что правая часть уравнения может расти к бесконечности определенным образом при $t \to +0$.

Исследована гладкость решения задач в классах Дини–Гёльдера.

Литература

1. **Камынин Л.И.** О решении методом потенциалов основных краевых задач для одномерного параболического уравнения второго порядка // Сибирский математический журнал. 1974. Т. 15. № 4. С. 806—834.

2. **Baderko E.A., Cherepova M.F.** Dirichlet Problem for Parabolic Systems with Dini Continuous Coefficients // Applicable Analysis. 2021. V. 100(13). Pp. 2900—2910.

3. **Зейнеддин М.** О потенциале простого слоя для параболической системы в классах Дини: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: Государственный ун-т им. М.В. Ломоносова, 1992.

4. **Черепова М.Ф.** Об оценках параболических потенциалов // Вестник МЭИ. 2000. № 6. С. 77—88.

References

1. **Kamynin L.I.** O Reshenii Metodom Potentsialov Osnovnykh Kraevykh Zadach dlya Odnomernogo Parabolicheskogo Uravneniya Vtorogo Poryadka. Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal. 1974;15;4:806—834. (in Russian).

2. **Baderko E.A., Cherepova M.F.** Dirichlet Problem for Parabolic Systems with Dini Continuous Coefficients. Applicable Analysis. 2021;100(13):2900—2910.

3. **Zeyneddin M.** O Potentsiale Prostogo Sloya dlya Parabolicheskoy Sistemy v Klassakh Dini: Avtoref. Dis. … Kand. Fiz.-mat. Nauk. M.: Gosudarstvennyy Un-t Im. M.V. Lomonosova, 1992. (in Russian).

4. **Cherepova M.F.** Ob Otsenkakh Parabolicheskikh Potentsialov. Vestnik MEI. 2000;6:77—88. (in Russian).

5. **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

6. **Бадерко Е.А.** О потенциалах для 2*p*-параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19(1). С. 9—18.

7. **Бадерко Е.А., Черепова М.Ф.** Смешанная задача для параболической системы на плоскости и граничные интегральные уравнения // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64(1). С. 20—36.

8. **Zhenyakova I.V., Cherepova M.F.** Regularity of Solution to the Cauchy Problem for Parabolic Equation in the Dini Space // J. Mathematical Sci. 2021. V. 259(2). Pp. 172—186.

9. **Камынин Л.И.** О единственности решения первой краевой задачи в неограниченной области для параболического уравнения второго порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1984. Т. 24(9). С. 1331—1345.

10. **Зейнеддин М.** Гладкость потенциала простого слоя для параболической системы второго порядка в классах Дини // Деп. в ВИНИТИ РАН 16.04.1992. № 1294-В92.

11. **Камынин Л.И.** Теорема с косой производной для равномерно параболического уравнения 2-го порядка // Сибирский математический журнал. 1989. Т. 30(1). С. 114—120.

5. **Dzyadyk V.K.** Vvedenie v Teoriyu Ravnomernogo Priblizheniya Funktsiy Polinomami. M.: Nauka, 1977. (in Russian).

6. **Baderko E.A.** O Potentsialakh dlya 2*p*-parabolicheskikh Uravneniy. Differentsial'nye Uravneniya. 1983; 19(1):9—18. (in Russian).

7. **Baderko E.A., Cherepova M.F.** Smeshannaya Zadacha dlya Parabolicheskoy Sistemy na Ploskosti i Granichnye Integral'nye Uravneniya. Sovremennaya Matematika. Fundamental'nye Napravleniya. 2018;64(1): 20—36. (in Russian).

8. **Zhenyakova I.V., Cherepova M.F.** Regularity of Solution to the Cauchy Problem for Parabolic Equation in the Dini Space. J. Mathematical Sci. 2021;259(2): 172—186.

9. **Kamynin L.I.** O Edinstvennosti Resheniya Pervoy Kraevoy Zadachi v Neogranichennoy Oblasti dlya Parabolicheskogo Uravneniya Vtorogo Poryadka. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki. 1984;24(9):1331—1345. (in Russian).

10. **Zeyneddin M.** Gladkost' Potentsiala Prostogo Sloya dlya Parabolicheskoy Sistemy Vtorogo Poryadka v Klassakh Dini. Dep. v VINITI RAN 16.04.1992. № 1294-V92. (in Russian).

11. **Kamynin L.I.** Teorema s Kosoy Proizvodnoy dlya Ravnomerno Parabolicheskogo Uravneniya 2-go Poryadka. Sibirskiy Matematicheskiy Zhurnal. 1989;30(1):114—120. (in Russian).

Сведения об авторах:

Женякова Ирина Владимировна — аспирантка кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: ZheniakovaIV@mpei.ru
Черепова Марина Федоровна — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического и компьютерного моделирования НИУ «МЭИ», e-mail: CherepovaMF@mpei.ru

Information about authors:

Zhenyakova Irina V. — Ph.D.-student of Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: ZheniakovaIV@mpei.ru
Cherepova Marina F. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Mathematical and Computer Modeling Dept., NRU MPEI, e-mail: CherepovaMF@mpei.ru

Работа выполнена при поддержке: Министерства науки и высшего образования РФ (проект № FSWF-2020-0022)
The work is executed at support: Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Project No. FSWF-2020-0022)

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов
Conflict of interests: the authors declare no conflict of interest

Статья поступила в редакцию: *01.04.2022*
The article received to the editor: *01.04.2022*