
2.1. СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ, ЗДАНИЯ И СООРУЖЕНИЯ (2.1.1)

УДК 624.31,004.942

DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156

Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач

М.Н. Кирсанов

Цель исследования — получение формул для оценки первой частоты колебаний пространственной модели фермы опор линий электропередач. Предложена пространственная статически определяемая модель конструкции. Для расчета матрицы жесткости фермы усилия в стержнях определены методом вырезания узлов в программе, составленной в среде символьной математики Maple. Система уравнений равновесия в проекциях на оси координат имеет матричную форму. Коэффициенты матрицы жесткости вычислены по формуле Максвелла—Мора. Шарниры приняты идеальными, масса фермы равномерно распределена по узлам фермы. Рассмотрены горизонтальные колебания масс. Для оценки первой частоты собственных колебаний использован метод Донкерлея, сводящий задачу с многими степенями свободы к вычислению парциальных частот. Коэффициенты в формуле решения установлены методом индукции, обобщением ряда формул для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей по высоте опор. Общие члены последовательностей коэффициентов удовлетворяют линейным однородным рекуррентным уравнениям не выше одиннадцатой степени. Решения уравнений дают итоговую формулу зависимости низшей частоты собственных колебаний фермы опоры с массой, распределенной по узлам, от числа панелей. Сравнение аналитического решения с численным показало, что погрешность полученной оценки не превышает 6%. Результаты можно использовать в инженерных расчетах опор линий электропередач.

Ключевые слова: опора линий электропередач, число панелей, нижняя оценка частоты, пространственная модель фермы, метод Донкерлея.

Для цитирования: Кирсанов М.Н. Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач // Вестник МЭИ. 2022. № 5. С. 150—156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156.

Estimation of Overhead Power Line Support Vibration Frequency

M.N. Kirsanov

The aim of the study is to obtain formulas for assessing the overhead power line support truss spatial model fundamental vibration frequency. A spatial statically determinate model of the structure is proposed. To calculate the truss stiffness matrix, the forces in the bars are determined by cutting out nodes in a program compiled in the Maple symbolic mathematics environment. The system of equilibrium equations in projections on the coordinate axes has a matrix form. The stiffness matrix coefficients are calculated using the Maxwell–Mohr formula. The hinges are taken to be ideal, and the truss weight is uniformly distributed over the truss nodes. Horizontal vibrations of the masses are considered. To estimate the natural vibration fundamental frequency, the Dunkerley method was used, which reduces the problem with many degrees of freedom to the calculation of partial frequencies. The coefficients in the solution formula are determined using the induction method by generalizing a number of formulas for trusses with a sequentially increasing number of panels along the height of supports. The general terms of the sequences of coefficients satisfy linear homogeneous recurrent equations of no higher than

eleventh degree. The solutions of the equations give the final formula for the dependence of the lowest natural vibration frequency of the support truss with the mass distributed over the nodes on the number of panels. A comparison of the analytical solution with the numerical one has shown that the error of the obtained estimate does not exceed 6%. The results can be used in engineering calculations of power line supports.

Key words: power line support, number of panels, lower frequency estimate, truss spatial model, Dunkerley's method.

For citation: Kirsanov M.N. Estimation of Overhead Power Line Support Vibration Frequency. Bulletin of MPEI. 2022;5:150—156. (in Russian). DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156.

Состояние вопроса

Воздействие нестационарной ветровой нагрузки, вибрация основания от проезжающего транспорта возмущают колебания опор линий электропередач. Исследование этого эффекта, как правило, проходит численно в специализированных программах или математических системах [1]. Не менее важно для практикующих инженеров и проектировщиков иметь приближенные формулы для расчета собственных частот колебаний подобных систем. Известны подходы, сочетающие методы конечных элементов и символьной математики [2]. Они обычно универсальны и пригодны для статически неопределимых систем, но при этом конечную компактную формулу для частоты колебаний не дают. В регулярных статически определимых системах возможны случаи, когда в качестве решения получается формула, дающая зависимость первой частоты не только от размеров и свойств материала конструкции, но и от числа панелей [3 — 6].

Для приближенной оценки основной частоты собственных колебаний инженерных сооружений иногда достаточно исследовать ее плоскую модель [7]. Замена пространственных ферм плоскими моделями для получения решения в аналитическом виде связана с тем, что пространственные системы, как правило, статически неопределимы. Действительно, твердое тело, которое представляет ферма с учетом известной аксиомы отвердевания, невозможно закрепить на плоскости, если опирать его по четырем угловым точкам в силу того, что плоскость в пространстве определяют три точки, четвертая опорная точка непременно вызовет статическую неопределимость. Однако есть исключения. Если в конструкции (стержневой ферме) одного стержня не хватает, и он перенесен в опорную группу, то задача может быть статически определимой. Именно такая модель опоры ЛЭП предложена и рассчитана в настоящей работе.

Постановка задачи

Методом индукции в системе символьной математики Maple выводится формула зависимости первой частоты колебаний модели опоры линий электропередач с произвольным числом панелей (рис. 1, 2). Статические деформации и распределение напряжений в этой модели описаны в [8]. Конструкция фермы опирается на четыре точки, одна из которых — сферический шарнир с тремя неизвестными реакциями, одна

опора — шарнир цилиндрический (две неизвестные реакции) и две вертикальные стойки. Определить реакции опор в такой задаче независимо от усилий во всех остальных стержнях не удастся. Усилия в стержнях находятся в общей системе уравнений равновесия узлов в проекции на оси координат. Уравнения содержат направляющие косинусы усилий в стержнях, вычисляемые по данным о координатах узлов и структуре соединения стержней. Предполагается, что масса фермы

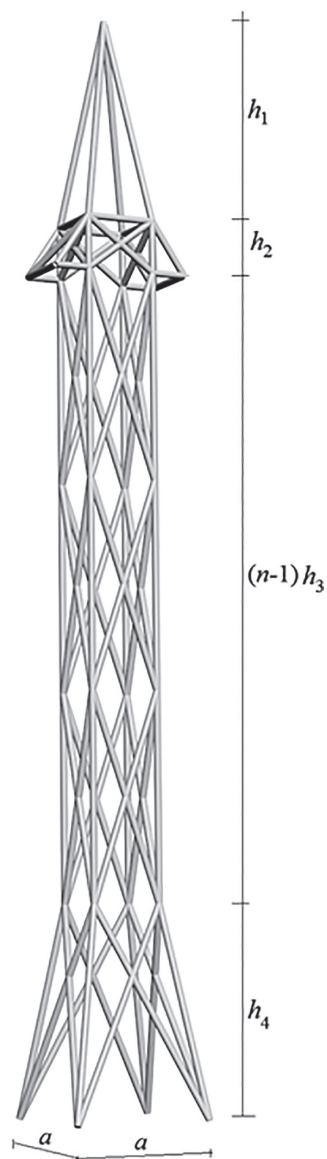
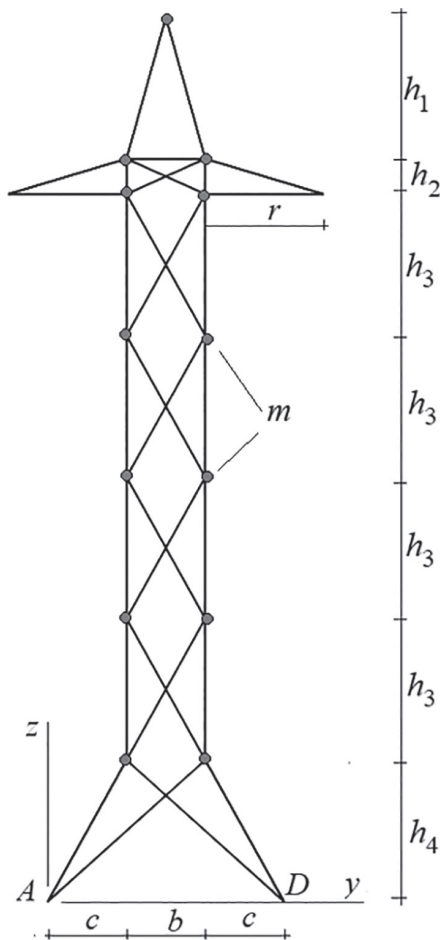


Рис. 1. Ферма, $n = 4$

Рис. 2. Размеры и точки крепления масс, $n = 5$

сосредоточена по ее узлам. Рассмотрен случай колебания масс по одной оси. Всего в ферме $K = 12n + 32$ стержней, не считая семи стержней в шарнирных опорах. Стержни предполагаются жесткими, деформации их не учитываются. Аналитическая оценка снизу первой собственной частоты колебаний стержневой пространственной регулярной консоли получена в [9]. Общие вопросы существования и расчета статически определимых регулярных стержневых конструкций рассмотрены в [10].

Метод решения

Расчет усилий. Геометрия фермы задается координатами ее узлов в программе Maple. Приведем соответствующий фрагмент программы на языке Maple. Секции опоры имеют высоту h_3 , вершина — h_1 . Сечение ствола опоры — $b \times b$, расстояния между точками опирания — $a = 2c + b$, где c — вынос опорной консоли высотой h_4 . Координаты четырех опорных точек основания:

$$\begin{aligned} x[1, 1] &:= 0; & x[1, 2] &:= 0; & x[1, 3] &:= 0; \\ x[2, 1] &:= a; & x[2, 2] &:= 0; & x[2, 3] &:= 0; \\ x[3, 1] &:= a; & x[3, 2] &:= a; & x[3, 3] &:= 0; \\ x[4, 1] &:= 0; & x[4, 2] &:= a; & x[4, 3] &:= 0; \end{aligned}$$

Здесь $x[k, 1], x[k, 2], x[k, 3]$ — координаты по оси x, y и z . Координаты узлов на стволе опоры имеют вид:

```
for i to n do
x[5+i·4,1]:=c:   x[5+i·4,2]:=c:   x[5+i·4,3]:=h+h·i/2:
x[6+i·4,1]:=a-c: x[6+i·4,2]:=c:   x[6+i·4,3]:=h+h·i/2:
x[7+i·4,1]:=a-c: x[7+i·4,2]:=a-c: x[7+i·4,3]:=h+h·i/2:
x[8+i·4,1]:=c:   x[8+i·4,2]:=a-c: x[8+i·4,3]:=h+h·i/2:
od:
```

Введем следующие соотношения размеров:

$$h_1 = h; h_2 = h_3 = h/2; h_4 = h; c = a/8.$$

Структуру решетки фермы зададим специальными упорядоченными списками номеров узлов на концах соответствующих стержней. Усилия в стержнях вычислим одновременно с реакциями опор из решения системы уравнений равновесия узлов в проекциях на оси координат. Усилия необходимы для получения матрицы жесткости конструкции по формуле Максвелла–Мора. Все преобразования выполнены в аналитическом виде в системе Maple. Элементами матрицы системы линейных уравнений равновесия являются направляющие косинусы усилий в стержнях.

Уравнение частот. Систему дифференциальных уравнений движения масс, расположенных в узлах, запишем в матричной форме:

$$\mathbf{M}_N \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{D}_N \mathbf{U} = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{U} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ — вектор горизонтальных перемещений масс $1, \dots, N$; $N = 4n + 5$ — число степеней свободы; $\ddot{\mathbf{U}}$ — вектор ускорений; $\mathbf{M}_N = m\mathbf{I}_N$ — матрица инерции размером $N \times N$, пропорциональная единичной матрице; \mathbf{D}_N — матрица жесткости.

По формуле Максвелла–Мора вычислим матрицу податливости \mathbf{B}_N , обратную матрице жесткости \mathbf{D}_N :

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^K S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где EF — жесткость стержней; $S_{\alpha}^{(i)}$ — усилие в стержне α от действия единичной горизонтальной силы, приложенной к узлу i ; l_{α} — длина стержня α .

Если левую часть уравнения (1) умножить на матрицу податливости \mathbf{B}_N , то оно приобретет вид:

$$m\mathbf{B}_N \mathbf{I}_N \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{U} = 0. \quad (3)$$

Форму колебаний представим в виде $u_k = v_k \sin(\omega_k t + \varphi_0)$, где ω — собственная частота колебаний. Поскольку $\ddot{\mathbf{U}} = -\omega^2 \mathbf{U}$, то из (3) следует $\mathbf{B}_N \mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}$. Таким образом, частоту собственных колебаний можно выразить через собственные числа матрицы \mathbf{B}_N : $\lambda = 1/(m\omega)^2$. Задача фактически сводится к проблеме собственных чисел матрицы податливости, вычисляемой по (2). В системе Maple есть специальный оператор Eigenvalues для установления собственных чисел матрицы. Частоты колебаний и собственные числа матрицы связаны:

$\omega = \sqrt{1/(m\lambda)}$. Первой (наименьшей) является частота, нижнее значение находится аналитически.

Оценка снизу. Метод Донкерлея. По формуле Донкерлея нижняя оценка главной частоты колебаний выглядит следующим образом:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^N \omega_i^{-2},$$

где ω_i — парциальная частота колебания груза массой m , в узле i фермы.

Уравнение колебаний (1) одной массы по оси y равно:

$$m\ddot{y}_i + d_i y_i = 0,$$

где y_i, \ddot{y}_i — горизонтальное смещение и ускорение массы; d_i — коэффициент жесткости (i — номер массы, элемент на главной диагонали матрицы \mathbf{B}_N).

Частоту колебаний вычислим по формуле $\omega_i = \sqrt{d_i/m}$. Для определения коэффициента жесткости возьмем формулу Максвелла–Мора в виде:

$$\delta_i = 1/d_i = \sum_{\alpha=1}^K (S_{\alpha}^{(i)})^2 l_{\alpha} / (EF).$$

Расчет ферм с различным числом панелей n дает общий вид формулы для определения нижней оценки ω_D . Для произвольного числа панелей имеем:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^N \delta_i = m \sum_{j=1}^6 C_j l_j^3 / (a^2 EF), \quad (4)$$

где

$$l_1 = a; \quad l_2 = \sqrt{5a^2 + 9h^2}; \quad l_3 = \sqrt{4a^2 + 9h^2}; \\ l_4 = h; \quad l_5 = \sqrt{2a^2 + 9h^2}; \quad l_6 = \sqrt{2a^2 + 36h^2}$$

— длины элементов фермы.

Коэффициенты $C_j, j = 1, \dots, 6$ зависят только от числа панелей и определяются методом индукции. Для этого по серии решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей найдем последовательности коэффициентов, для которых методами Марле определяются рекуррентные уравнения, которым они удовлетворяют. Решения уравнений дают искомые коэффициенты. Наибольшую трудность в этом случае вызывает определение коэффициента C_4 . Получена числовая последовательность 102591/392, 1274895/1936, 30183/20, 882495/304, 22124421/4232, 11184835/1296, Оператор `rgf_findrecug` по 22 членам этой последовательности дал уравнение

$$C_{4,n} = 3C_{4,n-1} + C_{4,n-2} - 11C_{4,n-3} + \\ + 6C_{4,n-4} + 14C_{4,n-5} - 14C_{4,n-6} - \\ - 6C_{4,n-7} + 11C_{4,n-8} - C_{4,n-9} - 3C_{4,n-10} + C_{4,n-11},$$

а оператор `rsolve` — его решение. Характеристическое уравнение имеет четыре кратных корня -1 и семь кратных корней 1 . Остальные коэффициенты получают проще и имеют вид полиномов по числу панелей:

$$C_1 = (8n^3 + 42n^2 + 2(80 - 3(-1)^n)n - \\ - 18(-1)^n + 165) / 36; \\ C_2 = (64n^5 + 208n^4 + 1752n^3 + \\ + 1259n^2 - 817n + 207) / (162(4n-1)^2); \\ C_3 = (128n^5 + 608n^4 + 2216n^3 + \\ + 1386n^2 - 1120n + 205)n / (144(4n-1)^2); \\ C_4 = (2464n^6 + 8424n^5 + 28180n^4 + \\ + 60(48(-1)^n + 301)n^3 + 2(3600(-1)^n - 7897)n^2 + \\ + 3(3817 - 1380(-1)^n)n + 540((-1)^n - 1)) / (80(4n-1)^2); \\ C_5 = (192n^5 + 912n^4 + 2336n^3 + \\ + 1669n^2 - 710n + 362) / (108(4n-1)^2); \\ C_6 = (16n^3 + 24n^2 - 16n + 51) / (72(4n-1)^2).$$

Численная проверка. Решение (5) можно сравнить с первой частотой всего спектра частот, полученного численно. Решим задачу о колебании ЛЭП с массами $m = 500$ кг, распределенными по узлам фермы в зависимости от числа панелей и размеров фермы. Рассмотрим для примера ферму с размерами $a = 3$ м, $h = 1$ м. Продольную жесткость стальных стержней фермы примем $EF = 0,2 \cdot 10^8$ Н. На рисунке 3 дано сравнение аналитического решения (нижняя кривая) и численного (пунктир). Увеличение числа панелей привело к уменьшению частоты.

Точность нижней оценки достаточно высока. Погрешность $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D)$ не превышает 6% (рис. 4).

Частота колебаний нелинейно зависит от размеров конструкции. Расчеты показали, что наибольшее влияние на частоту колебаний оказывают размер a и высота h . Зависимость первой частоты от размера a обнаруживает максимум (рис. 5). Этот факт можно использовать в оценочных расчетах частот колебаний конструкции при выборе ее оптимальных по своим частотным характеристикам параметрам.

Выводы

Предложенная статически определяемая схема пространственной конструкции опоры ЛЭП допускает аналитическое решение для нижней оценки собственной частоты колебаний. Решение имеет компактную форму и представлено в виде полиномов по числу панелей не выше шестой степени. Сравнение с численным решением дало высокую точность оценки. Особенностью задачи оказались значительные, по сравнению с расчетом плоских систем, затраты времени счета. Так, для вывода формул коэффициентов

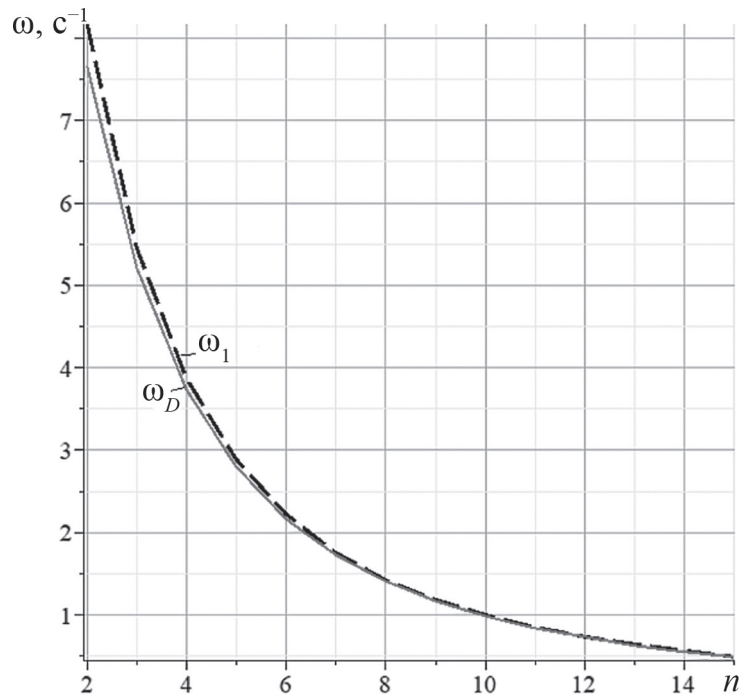


Рис. 3. Аналитическая оценка первой собственной частоты ω_D и численное решение ω_1 в зависимости от числа панелей

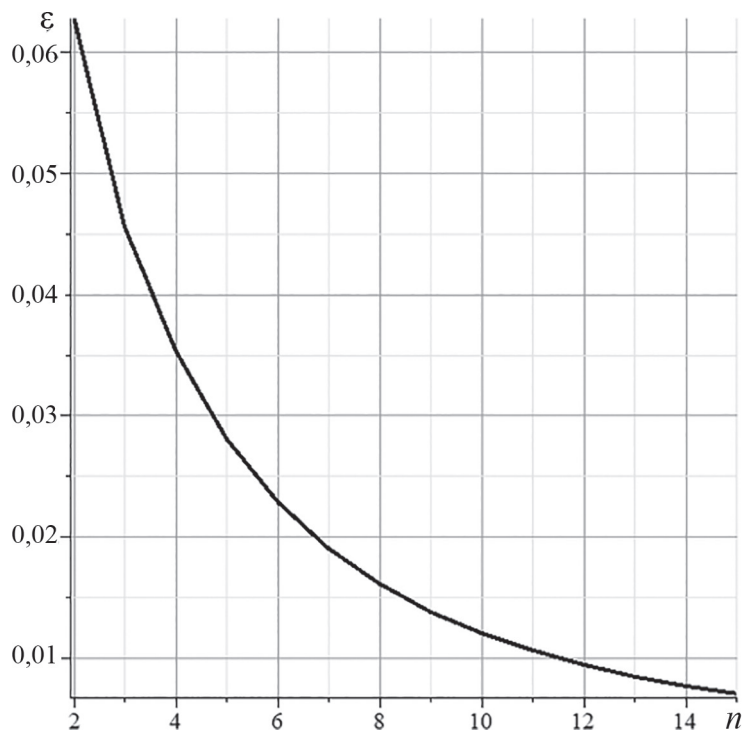


Рис. 4. Зависимость относительной погрешности оценки по Донкерлею от числа панелей

потребовалось несколько часов. Это связано с тем, что в пространственной модели больше стержней, и с тем, что в аналитической форме расчеты выполняются существенно медленней, чем в численной. Однако,

полученный результат в виде компактной и легко проверяемой формулы весьма удобен. Кроме того, простая форма обращения позволяет использовать аналитические решения в задачах оптимизации.

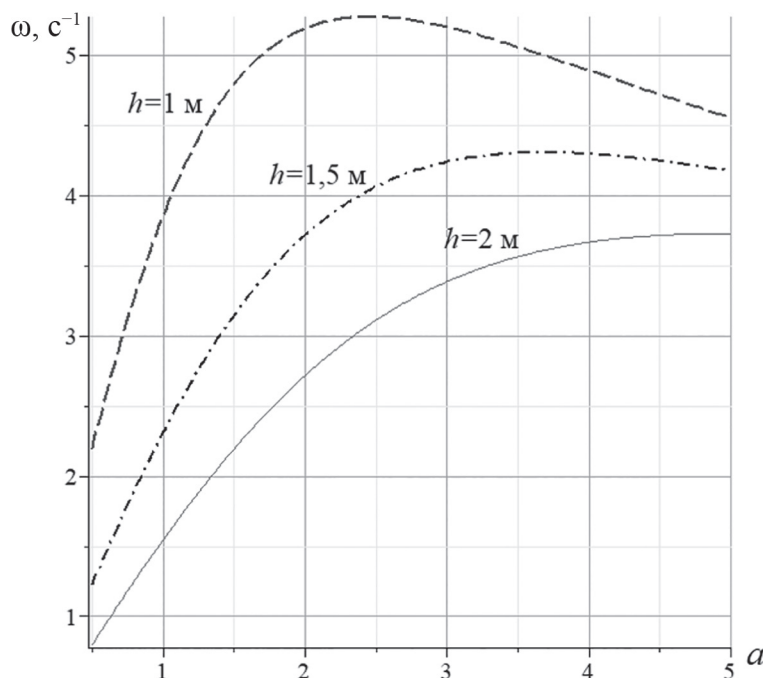


Рис. 5. Зависимость первой частоты размера основания a от высоты панели h

Литература

References

1. **Танасогло А.В.** Уточнение коэффициента динамичности анкерно-угловой опоры ВЛ 110 кВ при действии пульсационной составляющей ветровой нагрузки // Металлические конструкции. 2012. Т. 18. №. 2. С. 135—145.
2. **Рыбаков Л.С., Мишустин И.В.** Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры // Механика композиционных материалов и конструкций. 1999. Т. 5. № 2. С. 3—16.
3. **Vorob'ev O.** Bilateral Analytical Estimation of First Frequency of a Plane Truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. V. 92. No. 9204.
4. **Воробьев О.В.** О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1(24). С. 25—38.
5. **Petrenko V.** The natural Frequency of a Two-span Truss // Alfa Build. 2021. V. 20. No. 2001.
6. **Петренко В.Ф.** Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. 2021. № 4(31). С. 16—25.
7. **Кирсанов М.Н., Воробьев О.В.** Аналитические оценки деформаций и собственных частот опор линий электропередач // Вестник МЭИ. 2021. № 4. С. 122—128.
8. **Kirsanov M., Khromatov V.** Deformation of the Transmission Towers: Analytical Solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2021. V. 96. No. 9602.
9. **Kirsanov M.N., Vorobyev O.V.** The Analysis of Dependence of the Vibration Frequency of a Space Cantilever

1. **Tanasoglo A.V.** Utochnenie Koeffitsienta Dinamichnosti Ankerno-uglovoy Opory VL 110 kV pri Deystvii Pul'satsionnoy Sostavlyayushchey Vetrovoy Nagruzki. Metallicheskie Konstruktsii. 2012;18;2:135—145. (in Russian).
2. **Rybakov L.S., Mishustin I.V.** Sobstvennye Kolebaniya Ploskikh Regulyarnykh Uprugikh Ferm Ortogonal'noy Struktury. Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov i Konstruktsiy. 1999;5;2:3—16. (in Russian).
3. **Vorob'ev O.** Bilateral Analytical Estimation of First Frequency of a Plane Truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020;92;9204.
4. **Vorob'ev O.V.** O Metodakh Polucheniya Analiticheskogo Resheniya dlya Problemy Sobstvennykh Chastot Sharnirnykh Konstruktsiy. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2020;1(24):25—38. (in Russian).
5. **Petrenko V.** The Natural Frequency of a Two-span Truss. Alfa Build. 2021;20:2001.
6. **Petrenko V.F.** Otsenka Sobstvennoy Chastoty Dvukhproletnoy Femy s Uchetom Zhestkosti Opor. Stroitel'naya Mekhanika i Konstruktsii. 2021;4(31):16—25. (in Russian).
7. **Kirsanov M.N., Vorob'ev O.V.** Analiticheskie Otsenki Deformatsiy i Sobstvennykh Chastot Opor Liniy Elektroperedach. Vestnik MEI. 2021;4:122—128. (in Russian).
8. **Kirsanov M., Khromatov V.** Deformation of the Transmission Towers: Analytical Solution. Construction of Unique Buildings and Structures. 2021;96:9602.
9. **Kirsanov M.N., Vorobyev O.V.** The Analysis of Dependence of the Vibration Frequency of a Space

Truss on the Number of Panels // Вестник МГСУ. 2021. Т. 16. Вып. 5. С. 570—576.

10. **Hutchinson R.G., Fleck N.A.** The Structural Performance of the Periodic Truss // *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. No. 4. Pp. 756—782.

Cantilever Truss on the Number of Panels. *Vestnik MGSU*. 2021;16:5:570—576.

10. **Hutchinson R.G., Fleck N.A.** The Structural Performance of the Periodic Truss. *J. Mechanics and Physics of Solids*. 2006;54;4:756—782.

Сведения об авторе:

Кирсанов Михаил Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, механики, динамики и прочности машин НИУ «МЭИ», e-mail: mpei2004@yandex.ru

Information about author:

Kirsanov Mikhail N. — Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Machine Strength Dept., NRU MPEI, e-mail: mpei2004@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке: Российского научного фонда (проект № 22-21-00473)

The work is executed at support: Russian Science Foundation (Project No. 22-21-00473)

Статья поступила в редакцию: 30.12.2021

The article received to the editor: 30.12.2021